УДК 531:677

СИСТЕМА НЕЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ ИДЕАЛЬНО ГИБКОЙ НИТИ

А.Б. ЛАПШИН

(Костромской государственный технологический университет)

Ввиду сложности общих уравнений механики нити обычно рассматривается некоторый частный случай таких уравнений и разрабатывается метод решения именно для этого частного случая [1...3]. Данный подход реализован и в настоящей работе.

Новизна представленных результатов состоит в следующем: 1) получена единая система (и предложен метод ее решения) для описания продольно-поперечных колебаний идеально гибкой нити; 2) система уравнений объединяет три типа нелинейности, обычно не учитываемые совместно при проведении расчетов.

Рассмотрим уравнения плоского движения идеально гибкой растяжимой нити в переменных Лагранжа [1], [2]:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial s_0}\left(\dfrac{T_L}{f_L}\dfrac{\partial x_L}{\partial s_0}\right)=\dfrac{\partial^2 x_L}{\partial t^2}, \\ \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial s_0}\left(\dfrac{T_L}{f_L}\dfrac{\partial y_L}{\partial s_0}\right)=\dfrac{\partial^2 y_L}{\partial t^2}, \\ \left(\dfrac{\partial x_L}{\partial s_0}\right)^2+\left(\dfrac{\partial y_L}{\partial s_0}\right)^2=f_L^2, \\ T_L=EF(f_L-1)^{\gamma}, \end{cases} \tag{1}$$

где s_0, t – переменные Лагранжа; t – время; s_0 – лагранжева координата вдоль нити (выбор начала и положительного направления отсчета s_0 осуществляется по рекомендациям из [1], [2]); x_L, y_L – текущие координаты на нити, индекс L означает, что функции определены в переменных Лагранжа, $x_L = x_L(s_0,t)$; $y_L = y_L(s_0,t)$; T_L – сила натяжения, $T_L= T_L(s_0,t)$; μ_0 – линейная плотность нерастянутой нити; E – модуль Юнга; F – площадь поперечного сечения нити, $f_L= 1 + \varepsilon_L$; ε_L – относительная деформация нити, $f_L = f_L(s_0,t)$; γ – параметр, при $\gamma = 1$ четвертое уравнение системы (1) является законом Гука.

Предполагаем, что в начальный момент времени нить натянута, то есть при t=0: $f_L>1$ и $\varepsilon_L=\varepsilon_0>0$. Итак, система уравнений (1) содержит 4 уравнения и 4 неизвестных функции: x_L, y_L, f_L, T_L.

Рассмотрим частные случаи системы (1).

Пусть концы однородной нити закреплены и при равновесии нить располагается на отрезке оси абсцисс неподвижной декартовой системы координат Оху. Если, кроме того, рассматриваются малые поперечные колебания нити около положения равновесия, то $s_0\approx x$, $x_L =(1 +\varepsilon_0)x$, $y_L \approx y$. Тогда из (1) следует:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T}{\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2+(\partial y/\partial x)^2}}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ T=EF\left(\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2+(\partial y/\partial x)^2}-1\right)^{\gamma}. \end{cases} \tag{2}$$

С учетом разложения

$$\sqrt{(1+\varepsilon_0)^2+(\partial y/\partial x)^2}\approx 1+\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2+0{,}5(\partial y/\partial x)^2 \tag{3}$$

система (2) преобразуется к виду:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T}{1+\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2+0{,}5(\partial y/\partial x)^2}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ T=EF\left(\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2+0{,}5(\partial y/\partial x)^2\right)^{\gamma}. \end{cases} \quad (4)$$

Если в (4) пренебречь величиной $0{,}5(\partial y/\partial x)^2$, то получим систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{T}{1+\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2}\dfrac{\partial y}{\partial x}\right)=\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ T=EF\left(\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2\right)^{\gamma}. \end{cases} \quad (5)$$

которая с помощью обозначения $T=\dfrac{EF\left(\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2\right)^{\gamma}}{1+\varepsilon_0+0{,}5\varepsilon_0^2}$ = const преобразуется в классическое волновое уравнение для малых поперечных колебаний:

$$\frac{T_0}{\mu_0}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \quad (6)$$

Теперь получим из системы (1) уравнения малых продольных колебаний нити. В этом случае

$$y_L\approx y\approx 0,\ \ s_0\approx x(0)=x,\ \ x_L=x+u, \quad (7)$$

$$\frac{\partial x_L}{\partial s_0}=\frac{\partial(x+u)}{\partial s_0}=1+\frac{\partial u}{\partial x}=f_L, \quad (8)$$

u – смещение точки нити от положения равновесия x.

Тогда из (1) следует:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial}{\partial s_0}\left(\dfrac{T_L}{f_L}\dfrac{\partial x_L}{\partial s_0}\right)=\dfrac{\partial^2 x_L}{\partial t^2}, \\ f_L=\dfrac{\partial x_L}{\partial s_0}, \\ T_L=EF(f_L-1)^{\gamma}, \end{cases} \quad (9)$$

или при $\gamma = 1$:

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{\partial}{\partial x}\left(EF\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (10)$$

Если E и F – постоянные величины, то из (10) получаем классическое волновое уравнение для малых продольных колебаний:

$$\frac{E}{\varrho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad (11)$$

где ρ – объемная плотность материала нити; $\mu_0 = \rho F$.

При разработке численных методов важное значение имеет обеспечение условий выполнения основных законов динамики [4], [5]. Получим систему (1) из условий динамического равновесия (без привлечения методов механики нити).

Пусть абсолютно гибкая растяжимая нить длиной L в начальный момент расположена на отрезке оси Ox от 0 до L. Для определенности предположим, что концы нити закреплены в точках x = 0 и x=L. Разделим нить на N элементов точками (x_o,y_o), (x_l,y_l), ..., (x_N,y_N). Здесь и ниже индекс L (см. систему (1)) для простоты опускаем.

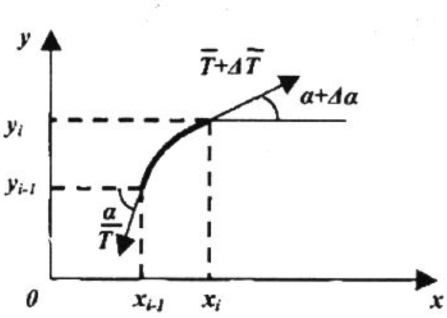

Рис. 1

Рассмотрим i-й элемент нити, соединяющий точки (x_{i-1}, y_{i-1}) и (x_i, y_i) (рис. 1 –

схема нагружения элемента идеально гибкой нити). Условия динамического равновесия этого элемента нити имеют вид:

$$\begin{cases} (T+\Delta T)\sin(\alpha+\Delta\alpha)\big|_i - T\sin\alpha\big|_{i-1} = m_i \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ (T+\Delta T)\cos(\alpha+\Delta\alpha)\big|_i - T\cos\alpha\big|_{i-1} = m_i \dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \end{cases} \tag{12}$$

где m_i – масса i-го элемента нити, $m_i = \mu_0 \Delta s_{0,i}$; $\Delta s_{0,i}$ – длина этого элемента в недеформированном состоянии:

$$\Delta s_{0,i} = \sqrt{(\Delta x_{0,i})^2 + (\Delta y_{0,i})^2}\ ;$$
$$\Delta x_{0,i} = x_i - x_{i-1};\ \ \Delta y_{0,i} = y_i - y_{i-1}\ , \tag{13}$$

вертикальная черта и нижний индекс справа от нее $(...)\big|_i$ в (12) означают, что все величины этого слагаемого вычисляются в точке i. Учитывая, что sinα, cosα представляют собой направляющие косинусы вектора $\vec{T}$ в двумерном (плоском) случае, систему (12) можно записать в виде:

$$\begin{cases} T_i \dfrac{\Delta y_i}{\Delta s_i} - T_{i-1}\dfrac{\Delta y_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} = \mu_0 \Delta s_{0,i}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \\ T_i \dfrac{\Delta x_i}{\Delta s_i} - T_{i-1}\dfrac{\Delta x_{i-1}}{\Delta s_{i-1}} = \mu_0 \Delta s_{0,i}\dfrac{\partial^2 x}{\partial t^2}, \\ \Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = f_i \Delta s_{0,i}, \\ T_i = EF(\Delta s_i / \Delta s_{0,i} - 1)^{\gamma}. \end{cases} \tag{14}$$

Разделив первые два уравнения системы (14) на $\Delta s_{0,i}$ ($\Delta s_{0,i} \neq 0$, так как предполагаем $x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_N$) и перейдя к пределу при $\Delta s_{0,i} > 0$ (а значит, и $\Delta s_i \to 0$) во всех уравнениях (14), получим систему (1). Заметим, что этот предельный переход возможен лишь при определенных условиях, рассматриваемых, например, в [6…8].

Для численного решения системы (14) с учетом начальных и граничных условий введем конечно-разностную пространственно-временную сетку [4]:

$$\omega = \omega_{xy} \times \omega_t\ ,$$
$$\omega_{xy} = \{(x_i, y_i); i = 0,1,2,...,N\},$$
$$\omega_t = \{t_n = n\Delta t, n = 0,1,...,K\}, \tag{15}$$

где Δt – шаг интегрирования; t_n – текущий момент времени; $(K\Delta t)$ – общее время моделирования.

Тогда система (14) запишется в виде:

$$\begin{cases} y_i^n = 2y_i^{n-1} - y_i^{n-2} + \dfrac{(\Delta t)^2}{\mu_0 \Delta s_{0,1}^{n-1}}\left(T_i^{n-1}\dfrac{\Delta y_i^{n-1}}{\Delta s_i^{n-1}} - T_{i-1}^{n-1}\dfrac{\Delta y_{i-1}^{n-1}}{\Delta s_{i-1}^{n-1}} \right), \\ x_i^n = 2x_i^{n-1} - x_i^{n-2} + \dfrac{(\Delta t)^2}{\mu_0 \Delta s_{0,1}^{n-1}}\left(T_i^{n-1}\dfrac{\Delta x_i^{n-1}}{\Delta s_i^{n-1}} - T_{i-1}^{n-1}\dfrac{\Delta x_{i-1}^{n-1}}{\Delta s_{i-1}^{n-1}} \right), \\ \Delta s_i^n = \sqrt{(\Delta x_i^n)^2 + (\Delta y_i^n)^2} = f_i^n \Delta s_{0,i}, \\ T_i^n = EF(\Delta s_i^n / \Delta s_{0,i} - 1)^{\gamma}. \end{cases} \tag{16}$$

С точки зрения теории разностных схем [4] система (16) реализует явную трехслойную конечно-разностную схему. Это означает, что, зная начальные, граничные условия и параметры в моменты времени $t_{n-2}=(n-2)\Delta t$ и $t_{n-1}=(n-1)\Delta t$ (верхние индексы (n-2),(n-1) в (16)), из системы (16) можно вычислить параметры x_i^n, y_i^n, f_i^n, T_i^n в момент $t_n=n\Delta t$.

Отметим, что система (16) учитывает три типа нелинейности: 1) произведения функций в скобках первого и второго уравнений; 2) радикалы в знаменателях дробей в этих скобках; 3) нелинейность реологического уравнения деформация – напряжение (при $\gamma \neq 1$). Расчеты показывают, что при определенных условиях может значимо проявляться каждый из данных типов нелинейности.

Система (16) позволяет моделировать движение неоднородной нити, если вместо E, F, μ_0 использовать E_i, F_i, $\mu_{0.i}$.

ВЫВОДЫ

Получена система нелинейных конечно-разностных уравнений, описывающая продольно-поперечные колебания (без допущения об их малости) при плоском движении идеально гибкой нити. Система учитывает различные типы нелинейности, которые могут существенно влиять на результаты расчетов сложных динамических режимов нагружения неоднородных материалов в текстильной технологии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мигушов И.И.* Механика текстильной нити и ткани. – М.: Легкая индустрия, 1980.
2. *Якубовский Ю.В., Живов В.С., Коритысский Я.И., Мигушов И.И.* Основы механики нити. – М.: Легкая индустрия, 1973.
3. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ, 2001.
4. *Самарский А.А., Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989.
5. *Андерсон Д. и др.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен: В 2-х т. Т. 1.– М.: Мир, 1990.
6. *Мандельштам Л.И.* Лекции по теории колебаний. – М.: Наука, 1972.
7. *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, 1992.
8. *Гришин А.Г., Лапшин А.Б., Пашин Е.Л.* // Изв. вузов. Машиностроение. – 2002, № 8. С.3...10.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 05.02.04.