УДК 677.057.62

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ПРОПИТКИ В ТРЕХВАЛЬНОЙ ПЛЮСОВКЕ

С.А. ПОЛУМИСКОВ, Н.Г. ТОМИН

(Ивановская государственная текстильная академия)

В текстильной промышленности для пропитки толстых и плотных тканей применяют трехвальную плюсовку, валы которой образуют емкость, заполненную раствором. Схема плюсовки показана на рис.1. Ткань сжимается первым по ходу ткани жалом валов и, выходя из него, попадает в пропитывающий раствор. Жало валов удаляет часть воздуха из ткани, и в ней создается давление $P_к$ пониженное, по сравнению с атмосферным P_o. Перепад давлений $P_o - P_к$ заталкивает раствор в ткань.

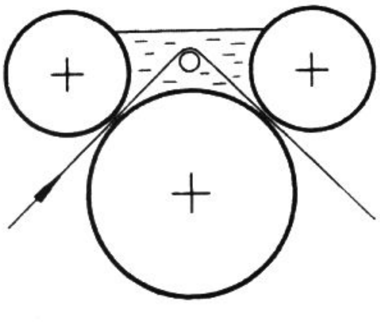

Рис. 1

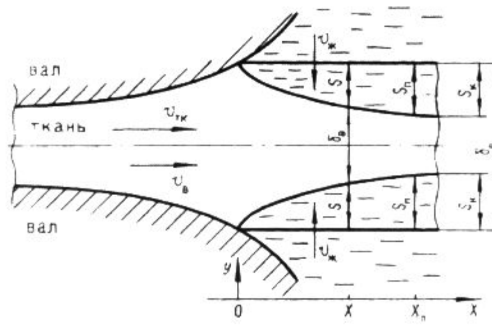

Рис. 2

В поставленной задаче требуется определить $S_к$ – глубину проникновения раствора внутрь ткани и $x_п$ – расстояние от выхода из жала валов до места завершения движения раствора внутрь ткани. Схема движения воздуха и раствора на выходе ткани из жала валов показана на рис.2. Глубина $S_к$ определяет качество прокрашенности ткани, а расстояние $x_п$ не должно превышать конструктивного размера трехвальной плюсовки – длины ткани от первого жала валов до второго.

Вначале примем два допущения, упрощающих задачу и основанных на большой разнице в значениях динамической вязкости воздуха и раствора: $\eta_в = 18{,}14 \cdot 10^{-6}$ Па·с; $\eta_ж = 1004 \cdot 10^{-6}$ Па·с. Первое – воздух течет внутри ткани в размере $\delta_в$ только вдоль оси Ох со скоростью $\upsilon_в$. Второе – раствор течет относительно ткани только вдоль оси Оу со скоростью $\upsilon_ж$.

Далее для математического описания движения используем два основных физических положения. Первое – условие неразрывности течения воздуха или жидкости. Второе – течение и воздуха, и жидкости подчиняется закону Дарси.

Примем за единицу массовый расход воздуха, находящегося в объеме несжатой ткани и движущегося вместе с тканью со скоростью последней. Тогда некоторая постоянная его доля будет массовым расходом воздуха в ткани, расположенной после жала валов.

Условие неразрывности для воздуха запишется в виде

$$N \varrho_o \upsilon_{тк} \delta_o \varepsilon_o \ell = \varrho \upsilon_в \delta_в \varepsilon_o \ell ,$$

где $\upsilon_{тк}$ – скорость ткани, м/с; δ_o – толщина ткани, м; ε_o – пористость ткани при толщине δ_o; ℓ – размер по ширине ткани, перпендикулярно плоскости рис. 2; N – массовый безразмерный расход воздуха через жало валов или, иначе, доля воздуха, оставшаяся в порах ткани.

Допустим, что изменением плотности воздуха можно пренебречь: $\varrho = \varrho_o$, тогда получим

$$\upsilon_в \delta_в = N \upsilon_{тк} \delta_o .$$

По закону Дарси определим скорость фильтрации воздуха:

$$u = -\frac{k_o}{\eta_в}\frac{dP}{dx},$$

где k_o – коэффициент проницаемости ткани при толщине δ_o, м^2.

Скорость фильтрации воздуха является относительной скоростью, также будет относительной скоростью и скорость воздуха в порах $\upsilon = u/\varepsilon_o$. Тогда абсолютная скорость воздуха $\upsilon_в$ будет $\upsilon_в = \upsilon_{тк} + \upsilon$. С учетом сказанного условие неразрывности относительно производной запишется в виде

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\upsilon_{тк}\eta_в\varepsilon_o}{k_o}\left(1 - \frac{N\delta_o}{\delta_в}\right). \qquad (1)$$

Из рис. 2 видно, что толщина канала может быть определена как $\delta_в = \delta_o - 2S$, где S – глубина проникновения раствора внутрь ткани, текущее значение.

Рассмотрим теперь, как движется раствор в ткани. По закону Дарси скорость фильтрации раствора будет

$$u_ж = \frac{k_o}{\eta_ж}\frac{P_o - P}{S} .$$

Переходя к скорости жидкости в порах $\upsilon_ж = u_ж/\varepsilon_o$, получим

$$\upsilon_ж = \frac{k_o}{\eta_ж\varepsilon_o}\frac{P_o - P}{S} .$$

С другой стороны, скорость жидкости в порах равна $\upsilon_ж = dS/dt$. Так как кроме того $\upsilon_{тк} = dx/dt$, то

$$\upsilon_{тк}\frac{dS}{dx} = \frac{k_o}{\eta_ж\varepsilon_o}\frac{P_o - P}{S} . \qquad (2)$$

Уравнения (1) и (2) представляют собой систему двух дифференциальных уравнений движения потоков воздуха и раствора в ткани, в которых постоянными являются восемь величин: $\upsilon_{тк}$, $\eta_в$, $\eta_ж$, δ_o, ε_o, k_o, P_o, N .

Объединим их в комплексы

$$A_в = \frac{\upsilon_{тк}\eta_в\varepsilon_o}{k_o}, \ \frac{Па}{м};$$

$$A_ж = \frac{k_o}{\upsilon_{тк}\eta_ж\varepsilon_o}\left(\frac{2}{\delta_o}\right)^2, \ \frac{1}{Па \cdot м};$$

$$A = \frac{A_в}{A_ж} = \left(\frac{\upsilon_{тк}\varepsilon_o\delta_o}{2k_o}\right)^2\eta_в\eta_ж , \ Па^2 ;$$

$$B = \frac{1}{A_ж\sqrt{A}} = \frac{\delta_o}{2}\sqrt{\frac{\eta_ж}{\eta_в}} , \ м .$$

Переменную S представим относительной величиной $\varphi = 2S/\delta_o$.

Так как N есть доля воздуха, оставшаяся в порах ткани после прохождения ею жала валов, то $\delta_o - 2S \geq N\delta_o$, откуда следует $0 \leq \varphi \leq 1 - N$.

Тогда из (1) и (2) получим

$$\frac{dP}{dx} = A_в\left(1 - \frac{N}{1-\varphi}\right), \qquad (3)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = A_ж\frac{P_o - P}{\varphi} . \qquad (4)$$

Начальные условия :

$$P = P_к , \ \varphi = 0 \ \text{при} \ x = 0 , \qquad (5)$$

где $0 < P_к < P_o$.

Будем искать зависимости между параметрами N, $P_к$ и $\varphi_к$, при которых задача Коши (3)...(5) имеет решение P(x) , φ(x) , удовлетворяющее естественным предельным условиям

$$P \to P_o , \ \varphi \to \varphi_к \quad \text{при} \ x \to +\infty , \qquad (6)$$

где $0 < \varphi_к \leq 1 - N$.

Если $0 < \varphi_к < 1 - N$, то согласно (3) и (6) $\lim\limits_{x \to +\infty}\frac{dP}{dx} > 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{x \to +\infty} P(x) = +\infty$, что противоречит (6). Поэтому решение задачи (3)...(6) может существовать лишь при выполнении условия

$$\varphi_к = 1 - N , \qquad (7)$$

которое мы и будем считать выполненным всюду далее. Условие (7) является естественным и означает, что вся часть объема пор ткани, из которой вытеснен воздух, заполнится раствором. И тогда глубина проникновения раствора внутрь ткани будет равна

$$S_к = \delta_o(1 - N)/2 . \qquad (8)$$

Поделив (3) на (4), получаем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dP}{d\varphi} = A\left(\varphi + N - \frac{N}{1-\varphi}\right)\frac{1}{P_o - P} ,$$

общее решение которого имеет вид

$$(P_o - P)^2 = C - A[(\varphi + N)^2 + 2N\ln(1 - \varphi)].$$

Отсюда с помощью (5) находим

$$(P_o - P)^2 = (P_o - P_к)^2 - A[(\varphi + N)^2 - N^2 + 2N \ln(1 - \varphi)] . \qquad (9)$$

Из (9), (6) и (7) получаем следующую зависимость между $P_к$ и N, которую в дальнейшем также будем считать всегда выполненной:

$$(P_o - P_к)^2 = A(1 - N^2 + 2N \ln N) . \qquad (10)$$

После подстановки (10) в (9) находим

$$(P_o - P)^2 = A[1 - (N + \varphi)^2 + 2N \ln\frac{N}{1-\varphi}]. \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (4), получаем

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{B\varphi}{\sqrt{1-(N+\varphi)^2 + 2N\ln\frac{N}{1-\varphi}}} , \qquad (12)$$

откуда с учетом (5) имеем

$$x(\varphi) = B\int_0^{\varphi}\frac{\psi\, d\psi}{\sqrt{1-(N+\psi)^2 + 2N\ln\frac{N}{1-\psi}}} . \qquad (13)$$

Из (12) нетрудно вывести асимптотическое соотношение $x'(\varphi) \sim B\sqrt{N(1-N)}/(1 - N - \varphi)$ при $\varphi \to \varphi_к - 0$. Но тогда с учетом (7) $x(\varphi) \to +\infty$ при $\varphi \to \varphi_к - 0$, поэтому согласно правилу Лопиталя находим

$$x(\varphi) \sim B\sqrt{N(1-N)}\ln\frac{1-N}{1-N-\varphi}$$

$$\text{при} \quad \varphi \to \varphi_к - 0 . \qquad (14)$$

Таким образом, непрерывная функция $x(\varphi)$, определенная формулой (13), строго возрастает от 0 до $+\infty$ с ростом φ от 0 до $\varphi_к$. Следовательно, обратная к ней функция $\varphi(x)$ существует, непрерывна и строго возрастает от 0 до $\varphi_к$ с ростом x от 0 до $+\infty$. Подставляя эту функцию $\varphi(x)$ в (11) при условии $P < P_o$, находим функцию $P(x)$. Непосредственная проверка показывает, что при выполнении условий (7) и (10) полученная таким образом пара функций $P(x)$ и $\varphi(x)$ является решением задачи (3)...(6).

Подставляя в (13) вместо φ величину $\varphi_п = (1 - q)\varphi_к$ при достаточно малом положительном q, получаем расстояние пропитки $x_п = x(\varphi_п)$. Так как $B=\delta_o\sqrt{\eta_ж / \eta_в}/2$, то согласно (13) $x_п$ пропорционально δ_o.

Из (14) следует

$$x_п \sim B\sqrt{N(1-N)}\ln\frac{1}{q} \quad \text{при} \quad q \to +0 . \qquad (15)$$

В частности, при $q = 10^{-n}$, где n – натуральное число, получаем

$$x_п \sim Bn\sqrt{N(1-N)}\ \ln 10 \approx 2{,}303Bn\sqrt{N(1-N)} \quad \text{при} \quad n \to +\infty . \qquad (16)$$

Для определенности всюду в дальнейшем полагаем $\varphi_п = 0{,}99\varphi_к$, что соответствует q = 0,01 и n = 2 в (16). Численный расчет расстояния пропитки $x_п = x(0{,}99\varphi_к)$ по формуле (13) в случае воды, то есть при B = 3,72, показывает, что $\max\limits_{0<N<1} x_п = x_п\big|_{N=0{,}445} = 7{,}44\delta_o$.

Для сравнения расчет по более простой асимптотической формуле (16) при B=3,72 и n = 2 приводит к несколько более завышенной, но достаточной для приближений оценке $\max\limits_{0<N<1} x_п \approx x_п\big|_{N=0{,}5} = 8{,}57\delta_o$.

ВЫВОДЫ

1. Интенсифицирующее воздействие жала валов на пропитку и глубину проникновения раствора внутрь ткани $S_к$ определяется только долей 1– N удаленного жалом валов воздуха, которая связана с интенсивностью распределенной нагрузки в первом жале валов.

2. Расстояние $x_п$, на котором идет пропитка, не превосходит десяти толщин ткани, зависит от динамической вязкости раствора и количества удаленного жалом валов воздуха; оно не зависит ни от скорости ткани, ни от свойств ткани: пористости и коэффициента проницаемости.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 11.05.04.