

РАСЧЕТ НАТЯЖЕНИЯ ВОЛОКОН В ПРОЦЕССЕ ВЫТЯГИВАНИЯ *

В.И. РОНЬЖИН, В.А. АВРЕЛЬКИН, И.Г. ЧИСТОБОРДОВ, В.Г. ЛАПШИН

(Ивановская государственная текстильная академия)

Основными силами, действующими на продукт в процессе вытягивания, являются силы трения, изучение которых необходимо продолжать, исследуя их влияние на движение волокон [1], [2]. При алгебраическом сложении соответствующих координат графиков [рис.1, 1] получим единую эпюру напряжения поля сил трения с положительной и отрицательной частями (рис.1). Часть графика функции, лежащая в нижней плоскости системы координат, не означает отрицательного значения величины напряжения поля сил трения, а показывает разность действий зажимов.

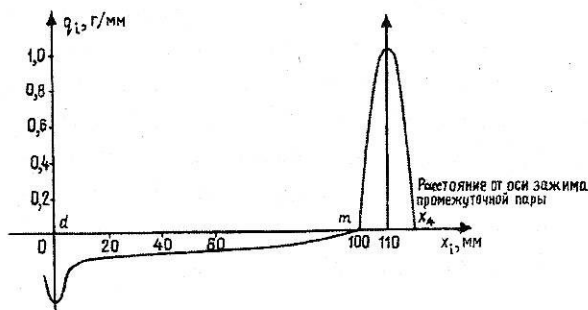


Рис. 1

Построенная эпюра напряжения поля сил трения в системе координат является некоторой функцией $F(x)$. В целях удобст-

ва определения вида этой функции разобьем ее на две части $F_1(x)$, $F_2(x)$, для чего аппроксимируем их под известные функциональные зависимости [3].

В общем виде уравнение регрессии выглядит так:

$$y = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x) + \dots + a_k P_k(x), \quad (1)$$

где a_k – константа; $P_k(x)$ – полином Чебышева:

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x - \frac{n+1}{2},$$

$$P_2(x) = x^2 - (n-1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{6}.$$

Функцию $F_1(x)$, лежащую на отрезке $[d; m]$, выразим уравнением регрессии первого порядка:

$$y = a_0 P_0(x) + a_1 P_1(x), \quad (2)$$

где n – объем выборки;

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}, \quad a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_1(i)}{\sum_{i=1}^n P_1^2(i)}, \quad a_k = \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_k(i)}{\sum_{i=1}^n P_k^2(i)}, \quad \sum_{i=1}^n P_1^2(i) = \frac{n(n^2-1)}{12}.$$

* Работа выполнена по гранту 2002 г. Министерства образования РФ по фундаментальным исследованиям в области технических наук.

Работа выполнена под руководством проф., докт. техн. наук Г.И.Чистобородова

Произведем замену:

$$z = \frac{x}{10}, \text{ и } y = 1000(q - 0,064),$$

где x и q – переменные из [табл. 3, 1].

Определим искомые параметры для всех значений z_i , а результаты сведем в табл. 1.

Таблица 1

$z_i = i$	y_i	$P_1(i)$	$y_i P_1(i)$	$P_2(i)$	$y_i P_2(i)$	y_i^2
1	0	-4,5	0	12	0	0
2	-5	-3,5	17,5	4	-20	25
3	-13	-2,5	32,5	-2	26	169
4	-18	-1,5	27	-6	108	324
5	-23	-0,5	11,5	-8	184	529
6	-32	0,5	-16	-8	256	1024
7	-35	1,5	-52,5	-6	210	1225
8	-40	2,5	-100	-2	80	1600
9	-44	3,5	-154	4	-176	1936
10	-47	4,5	-211,5	12	-564	2209
Σ	-257		-445,5		104	9041

Тогда с учетом замены получим

$$y = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z),$$

$$P_0(z) = 1, \quad P_1(z) = z - 5,5.$$

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \frac{-257}{10} = -25,7,$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_1(i)}{\sum_{i=1}^n P_1^2(i)} = \frac{-445,5}{82,5} = -5,4,$$

$$\sum_{i=1}^{10} P_1^2(i) = \frac{10 \cdot (99)}{12} = 82,5.$$

Следовательно, уравнение регрессии первого порядка для искомого варианта имеет вид:

$$y = -25,7 - 5,4(z - 5,5). \quad (3)$$

Найдем остаточную дисперсию $S_{1\text{ост}}^2$:

$$SS_0 = \sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 =$$

$$= 9041 - \frac{1}{10} \cdot (-257)^2 = 2436,1,$$

$$SS_1 = SS_0 - a_1^2 \sum_{i=1}^n P_1^2(i) =$$

$$= 2436,1 - (-5,4)^2 \cdot 82,5 = 30,4;$$

$$s_{1\text{ост}}^2 = \frac{SS_1}{n-2} = 3,8.$$

Для наиболее точного результата определения функции исследуем аналогичным образом уравнение регрессии второго порядка:

$$y = a_0 P_0(z) + a_1 P_1(z) + a_2 P_2(z), \quad (4)$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n y_i P_2(i)}{\sum_{i=1}^n P_2^2(i)} = 0,197, \quad P_2(z) = z^2 - 9z + 22,$$

$$\sum_{i=1}^n P_2^2(i) = \frac{n(n^2 - 1)(n^2 - 4)}{180} = 528.$$

Получим

$$y = -25,7 - 5,4(z - 5,5) +$$

$$+ 0,197(z^2 - 9z + 22). \quad (5)$$

Определим остаточную дисперсию $S_{2\text{ост}}^2$:

$$\begin{aligned} SS_2 &= SS_1 - a_2^2 \sum_{i=1}^n P_2^2(i) = \\ &= 30,4 - (0,197)^2 \cdot 528 = 9,915, \end{aligned}$$

$$s_{2\text{ост}}^2 = \frac{SS_2}{n-3} = 1,42.$$

Проверим значимость различия $s_{1\text{ост}}^2$ и $s_{2\text{ост}}^2$ по критерию Фишера:

$$F = \frac{s_{1\text{ост}}^2}{s_{2\text{ост}}^2} = 2,68,$$

$$F_{0,95}(8;7) = 3,7.$$

$$F < F_{1-P}(f_1;f_2),$$

где f_1 и f_2 – число степеней свободы.

Следовательно, уравнение второго порядка не является существенным уточнением уравнения первого порядка. Возвратимся к переменным q и x и функциональное выражение изменения напряжения поля сил трения на первом исследуемом отрезке в декартовых координатах будет выглядеть следующим образом:

$$q = F_1(x) = 0,00054x - 0,068. \quad (6)$$

Полученное решение является окончательным в классе полиномов. Оценим тесноту найденной связи:

$$\Theta = \sqrt{1 - \xi},$$

$$\xi = \frac{SS_1}{SS_0} = \frac{30,4}{2436,1} = 0,0125,$$

$$\Theta = 0,994.$$

Корреляционное отношение Θ близко к единице, следовательно, найденная связь близка к строго функциональной.

Функция $F_2(x)$, лежащая на отрезке $[m; x_4]$, является параболой и определяется так:

$$F_2(x) = a(x - x_1)(x - x_2), \quad (7)$$

где x_1, x_2 – координаты пересечения ветвей параболы с осью OX ; x – координата вершины параболы; a – параметр, зависящий от конструктивных особенностей вытяжного прибора и физических свойств исследуемого волокнистого продукта.

Определим параметр a :

$$x_1 = 107,7; \quad x_2 = 112,3; \quad x = 110 \text{ [табл.2, 1],}$$

$$F_2(x) = a(110 - 107,7)(110 - 112,3),$$

$$F_2(110) = 0,92.$$

Откуда

$$a = -0,174.$$

Следовательно,

$$F_2(x) = -0,174x^2 + 38,28x - 2104,48. \quad (8)$$

Рассчитывая аналогичным образом, как и ранее, тесноту нелинейной связи, получим, что корреляционное отношение Θ достаточно близко к единице, следовательно, функциональная зависимость между параметрами существует.

При дальнейшем исследовании примем ряд допущений: структура продукта детерминированная, все волокна продукта распрямленные, угол подъема винтовой линии волокон одинаков. Исследуемый продукт в ремешковой зоне имеет незначительную толщину, поэтому при вытягивании давление ремешка на волокна продукта распределено равномерно – это и является причиной того, что эпюра напряжения поля сил трения определена в плоской системе координат, а не в объемной, как в реальном процессе вытягивания.

Положение волокна в поле вытягивания можно охарактеризовать расположением его переднего конца. Рассмотрим натяжение волокна длиной l , когда передний конец волокна находится в точке x поля вытягивания.

Обозначим натяжение волокна, находящегося в некотором месте вытяжного поля, когда передний конец волокна находится в точке \bar{x} , через $R_{\bar{x}}(x)$:

$$R_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} \int_{\bar{x}-l}^x F_1(x) dx & \bar{x}-l \leq x \leq m, \\ \int_x^{\bar{x}} F_2(x) dx & m < x < \bar{x}. \end{cases} \quad (9)$$

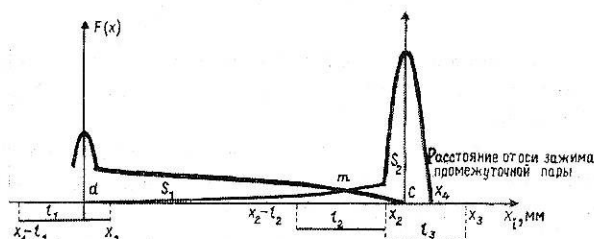


Рис. 2

Исследуем натяжение волокна в различных сечениях поля вытягивания:

1) $\bar{x} \leq d$,

где d – точка в поле вытягивания, после которой передний зажим начинает оказывать свое действие; положение данной точки в поле вытягивания непостоянно и зависит от свойств вытягиваемого продукта, а также от конструктивных особенностей вытяжного прибора.

Данное условие означает, что волокно еще не дошло до точки d , то есть находится в зоне действия заднего зажима (на рис.2 волокно l_1 и $\bar{x} = x_1$);

2) $\bar{x} - l \geq m$,

где m – точка, в которой число быстро движущихся волокон равно числу медленно движущихся.

Волокно пересекло точку m и находится под влиянием переднего зажима (на рис.2 волокно l_3 и $\bar{x} = x_3$);

3) $d < \bar{x} < c$.

При данном условии передняя часть волокна находится в зоне действия переднего зажима, а задний конец волокна – в области действия заднего зажима (x_1 – точка перехода волокна со скорости задней пары на скорость передней), (на рис.2 волокно l_2 и $\bar{x} = x_2$).

В этом случае натяжение в точках волокна будет зависеть от расположения точек \bar{x} и x_i :

– $\bar{x} < x_i$ – означает, что волокно движется со скоростью заднего зажима.

Натяжение волокна в зависимости от места его расположения в поле вытягивания рассчитывается следующим образом:

$$R_{\bar{x}}(x) = \int_{\bar{x}-l}^m F_1(x) dx - \int_m^{\bar{x}} F_2(x) dx. \quad (10)$$

Исследуем функциональную зависимость $R_{\bar{x}}(x)$ системы уравнений (9) на экстремум. Рассмотрим свойства функции $y = R_{\bar{x}}(x)$.

Функция $y = R_{\bar{x}}(x)$ есть непрерывная функция. Непрерывность ее на интервалах $[d; m]$ и $[m; \bar{x}]$ очевидна. Следует отметить, что в т. m функция $R_{\bar{x}}(x)$ также непрерывна.

Исследуем интервалы возрастания и убывания и экстремумы функции $y = R_{\bar{x}}(x)$. Пользуясь методами дифференциального исчисления для непрерывной функции, определим точки экстремумов, интервалы возрастания и убывания ее. Для этого найдем первую производную:

$$R'_{\bar{x}}(x) = \begin{cases} F_1(x) & \bar{x}-l < x < m, \\ -F_2(x) & m < x < \bar{x}. \end{cases} \quad (11)$$

На отрезке $[d; m]$ натяжение $R'_{\bar{x}}(x) > 0$, следовательно, $R_{\bar{x}}(x)$ есть возрастающая функция. На отрезке $[m; \bar{x}]$ натяжение $R'_{\bar{x}}(x) < 0$ есть функция убывающая. Таким образом, натяжение, которое испытывает волокно в поле вытягивания, неодинаково (рис.3).

Ось зажима промежуточной пары Ось зажима выпускной пары

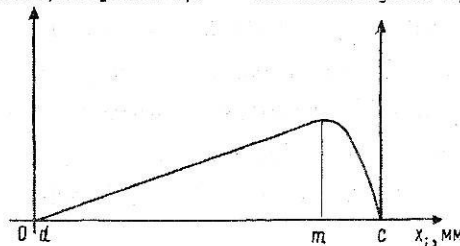


Рис. 3

Для волокон, расположенных на отрезке $[d; m]$, натяжение есть монотонно возрастающая функция, на отрезке $[m; c]$ – монотонно убывающая. Максимальное значение натяжения волокно испытывает в точке m вытяжного поля:

– $x \geq x_1$ – это означает, что передний конец волокна пришел в ту точку, где волокно мгновенно меняет свою скорость.

Натяжение в данном случае определяется выражением

$$R_{\bar{x}}(x) = \int_m^{\bar{x}} F_2(x) dx - \int_{\bar{x}-\ell}^m F_1(x) dx. \quad (12)$$

Таким образом, получены уравнения для определения натяжения волокна, которое зависит от расположения волокна в поле вытягивания, а также от действующих на продукт полей сил трения.

1. Рассмотрены факторы, влияющие на натяжение волокна, которые позволяют обоснованно прогнозировать поведение волокон при движении их в поле вытягивания.

2. Установлена аналитическая зависимость натяжения волокна от места расположения последнего в поле вытягивания и от характера изменения напряжения поля сил трения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роньжин В.И. и др. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. –2003. №1. С.35...38.
2. Комаров В.Г. и др. Прядение лубяных и химических волокон и производство крученых изделий. – М.: Легкая индустрия, 1980.
3. Воднев В.Т. и др. Основные математические формулы. – Мн.: Вышэйшая школа, 1988.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии и черчения. Поступила 04.02.03.