

УДК 677-486.2:539.311

**УТОЧНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ  
О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ НИТИ НА ЦИЛИНДРЕ\***

*В. М. КАГАН, В. П. ЩЕРБАКОВ*

**(Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности,  
Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)**

Еще в 1775 г. Леонард Эйлер получил решение задачи о равновесии абсолютно гибкой нити на шероховатой поверхности кругового цилиндра при заданных активных силах, коэффициенте трения  $\mu$  и предположении, что силы трения подчиняются закону Амонтона.

Формула Эйлера записывается в виде

$$T_2 = T_1 e^{\mu\alpha}, \quad (1)$$

где  $T_1$  – натяжение (ведомой) набегающей ветви нити;  $T_2$  – натяжение сбегущей (ведущей) ветви нити;  $\alpha$  – угол охвата нитью цилиндра.

При расчете гибкой нити предполагается, что из внутренних сил в ней возникает лишь осевая сила – натяжение  $T$ , а жесткость нити при изгибе и кручении отсутствует. Однако реальные нити имеют ненулевую жесткость. Поэтому механика гибкой нити не описывает ни качественно, ни количественно взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин, когда значительное влияние на форму и натяжение нити оказывает жесткость при изгибе и кручении [1, 2] и [3, 4].

Уравнения равновесия упругой нити в проекциях на естественные оси. Рассматриваемая задача наиболее просто решается с использованием уравнений в проекциях на касательную  $t$ , главную нормаль  $n$  и би-

нормаль  $b$  – естественные оси, связанные с началом координат в какой-либо точке осевой линии нити.

Кроме того, в связанных осях компоненты внутренних сил  $Q_i$  и моментов  $M_i$  имеют четкий физический смысл:  $Q_t$  – осевая сила (натяжение  $T$ );  $Q_n$  и  $Q_b$  – перерезывающие силы;  $M_t$  – крутящий момент;  $M_n$  и  $M_b$  – изгибающие моменты.

Клебшем были предложены уравнения, основанные на пропорциональности компонентов кривизны и кручения при деформировании компонентам главного момента внутренних усилий.

Для изгибающего момента в случае плоской нити имеем  $M = \frac{H}{\rho}$ , где  $\frac{1}{\rho}$  – кривизна нити,  $H$  – жесткость нити при изгибе.

Скалярные уравнения в проекциях на связанные оси с учетом, что нить плоская, запишутся так:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} - \frac{Q}{\rho} + f_t &= 0, \\ \frac{dQ}{ds} + \frac{T}{\rho} + f_n &= 0, \\ \frac{dM}{ds} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

\* Начало.

где  $s$  – дуговая координата;  $f_t$  и  $f_n$  – внешние касательная и нормальная распределенные силы, приложенные к нити.

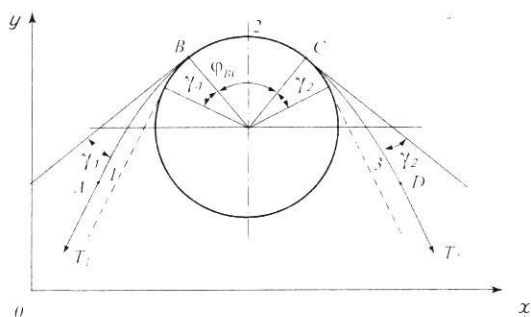


Рис. 1

Тонкая нить движется с малой постоянной скоростью в плоскости, перпендикулярной оси кругового цилиндра радиуса  $R$  (рис. 1, где представлена расчетная схема взаимодействия упругой нити с цилиндром) от точки  $A$  к точке  $D$  и на участке  $BC$  касается цилиндра.

Установим правила знаков для кривизны и изгибающих моментов, пользуясь правой системой координат и считая отсчет углов положительным против часовой стрелки.

Точное выражение кривизны осевой линии нити записывается в виде  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\vartheta}{ds}$ , где  $\vartheta$  – угол наклона касательной в текущей точке упругой линии (рис. 2).

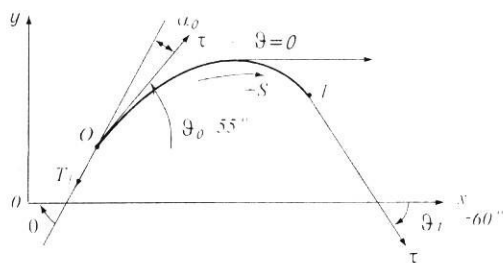


Рис. 2

Будем считать направление силы  $T_1$  основным направлением; от линии действия  $T_1$  отсчитываются величины  $\vartheta$ .

Обозначим через  $\theta$  угол наклона оси  $x$  к вектору силы  $T_1$ . Введя обозначение  $\alpha = \vartheta - \theta$ , получим выражение для кривиз-

ны, аналогичное предыдущему:  $\frac{1}{\rho} = \frac{d\alpha}{ds}$ .

Кривизна в данной точке упругой линии считается положительной, если угол наклона касательной к упругой линии увеличивается с увеличением длины дуги  $s$ . Кривизна будет отрицательной, если при возрастании  $s$  угол наклона уменьшается. В нашей задаче при выбранной системе координат  $xOy$  и направлении отсчета дуговой координаты (рис. 2) кривизна осевой линии нити является отрицательной.

Для изгибающего момента  $M$  из правила знаков кривизны вытекает следующее: изгибающий момент  $M$  в любом сечении нити считается положительным, если он стремится увеличить значение кривизны. При этом учитывается знак кривизны, то есть положительный момент увеличивает положительную кривизну. Здесь же изгибающий момент увеличивает отрицательную кривизну и поэтому является отрицательным.

Прежде всего надо учесть, что на границе контактной зоны возникает сосредоточенная контактная сила.

Покажем необходимость возникновения сосредоточенных реакций в точках набегания и схода нити с поверхности.

Интегральные уравнения. Эти силы реакций не могут входить в дифференциальные уравнения, их существование вытекает из условия стыковки участков нити на поверхности и вне нее.

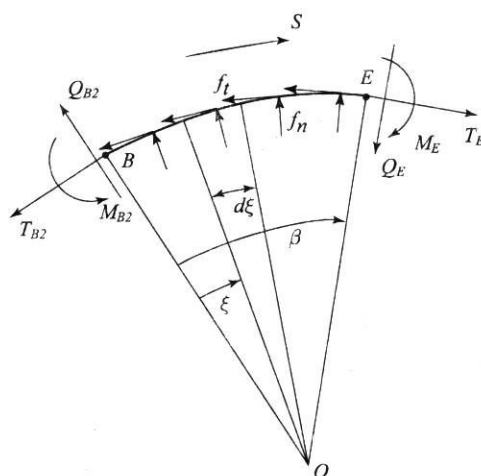


Рис. 3

Рассмотрим равновесие нити на участке 2, используя интегральные соотношения. На рис. 3 показано равновесие отрезка BE нити (здесь E – некоторая точка на участке BC, положение которой определяется углом  $\beta$ ).

На рассматриваемом участке контакта нити с поверхностью на элемент BE действуют две внешние распределенные силы:

$$-Q_E + Q_{B2} \cos \beta - T_{B2} \sin \beta + R \int_0^\beta f_n(\xi) \cos(\beta - \xi) d\xi - R \int_0^\beta f_t(\xi) \sin(\beta - \xi) d\xi = 0$$

или с учетом  $Q_E = Q(\beta)$ ,  $f_t = \mu f_n$ :

$$Q(\beta) - Q_{B2} \cos \beta + T_{B2} \sin \beta = R \int_0^\beta f_n(\xi) [\cos(\beta - \xi) - \mu \sin(\beta - \xi)] d\xi. \quad (3)$$

Аналогично получаем второе уравнение, проектируя все силы на касательную к

оси нити (в нашем случае к окружности) в точке E:

$$T_E - T_{B2} \cos \beta - Q_{B2} \sin \beta = R \int_0^\beta f_n(\xi) [\mu \cos(\beta - \xi) + \sin(\beta - \xi)] d\xi. \quad (4)$$

Еще одно уравнение получим, приравняв нулю сумму моментов относительно точки O всех сил, приложенных к отрезку BE:

$$(T_{B2} - T_E)R + M_{B2} - M_E = \mu R^2 \int_0^\beta f_n(\xi) d\xi.$$

Вследствие того, что нить расположена на дуге окружности,  $M_{B2} = M_E$ . Тогда:

$$T_{B2} - T(\beta) = -\mu R \int_0^\beta f_n(\xi) d\xi. \quad (5)$$

Получили систему трех интегральных уравнений относительно трех неизвестных:  $T(\beta)$ ,  $Q(\beta)$ ,  $f_n(\beta)$ .

Ядра интегральных уравнений (3) и (4) являются разностными, поэтому решить систему проще всего при помощи преобразования Лапласа.

касательная нагрузка  $f_t$  (сила трения между нитью и цилиндром) и нормальная реакция  $f_n$  поверхности цилиндра на нить. При этом они связаны между собой законом Амонтона  $f_t = \mu f_n$ .

Спроектируем все силы, действующие на элемент нити BE на направление OE:

Обозначим  $\tilde{f}_n(t)$  преобразование Лапласа функции  $f_n(\beta)$ , то есть

$$\tilde{f}_n(t) = \int_0^\infty f_n(\beta) e^{-t\beta} d\beta.$$

Аналогично  $\tilde{T}(t)$  – преобразование Лапласа функции  $T(\beta)$ . Применив преобразование Лапласа к уравнениям (4) и (5), получим

$$\tilde{T}(t) - T_{B2} \frac{t}{t^2 + 1} - Q_{B2} \frac{1}{t^2 + 1} = R \tilde{f}_n(t) \frac{\mu t + 1}{t^2 + 1},$$

$$\frac{T_{B2}}{t} - \tilde{T}(t) = -\mu R \frac{\tilde{f}_n(t)}{t}.$$

Исключив  $\tilde{T}$ , запишем выражение для  $\tilde{f}_n$ :

$$\tilde{f}_n = \frac{T_{B2} - tQ_{B2}}{R(t - \mu)} = \frac{T_{B2} + \mu Q_{B2}}{R(t - \mu)} - \frac{Q_{B2}}{R}.$$

Применяя обратное преобразование Лапласа, имеем

$$f_n(\beta) = (T_{B2} + \mu Q_{B2})e^{\mu\beta} - \frac{Q_{B2}}{R}\delta(\beta), \quad (6)$$

где  $\delta(\beta)$  – дельта-функция Дирака (обобщенная функция).

Функция Дирака обладает следующими свойствами:

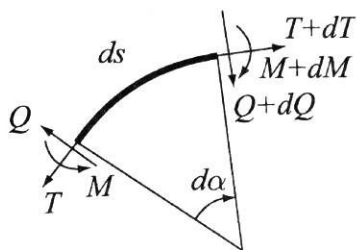


Рис. 4

В точке В силы реакции, направленные вверх, содержат сосредоточенную силу, которая должна быть уравновешена поперечной силой, направленной вниз. На левом торце выделенного элемента перерезывающая сила будет направлена вверх. Кроме того, из третьего уравнения системы (2) при отрицательном изгибающем моменте М сила Q тоже должна быть отрицательной, то есть направленной от центра кривизны.

На свободном участке CD нити происходит ее разгибание (рис. 5 – равновесие сбегающей с цилиндра ветви нити); изгибающий момент уменьшает по абсолютному значению отрицательную кривизну и поэтому считается положительным. В точке С сосредоточенная сила реакции уравновешивается перерезывающей силой Q, направленной вниз, то есть сила Q является положительной. Таким образом, уравнения (2) описывают напряженное состояние любого участка нити.

$$\delta(\beta) = \begin{cases} 0, & \beta < 0; \\ \infty, & \beta = 0, \\ 0, & \beta > 0; \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\beta) d\beta = 1.$$

Распределенная реакция цилиндра на нить, определяемая формулой (6), по мере приближения к границам контакта стремится к бесконечности, и в пределе при  $\beta = 0$  в точке В мы получаем сосредоточенную нормальную силу.

Теперь определим направления перерезывающих сил Q, приложенных на торцах элемента нити длиной ds (рис. 4 – равновесие набегающей на цилиндр ветви нити).

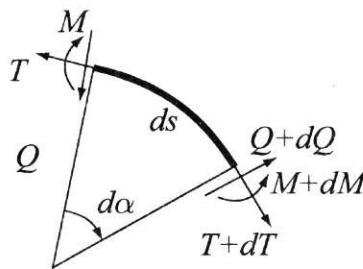


Рис. 5

Мы имеем три участка. На первом участке нить движется к цилиндру, на третьем сходит с него. Форма нити здесь неизвестна, но известно, что распределенная внешняя касательная  $f_t$  и нормальная  $f_n$  нагрузка на этих участках равна нулю. На втором участке нить скользит по цилиндру. Величины  $f_t$  и  $f_n$  здесь неизвестны, зато известна форма нити.

Рассмотрим равновесие элемента нити, соответствующего состоянию участка 1 набегающей на цилиндр ветви нити. В ветви АВ происходит нагрузка-сгибание; направление усилий показано на рис. 4.

Система дифференциальных уравнений (2) примет вид:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{Q}{\varrho}, \quad (7)$$

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{T}{\varrho}, \quad (8)$$

$$\frac{dM}{ds} = -Q, \quad (9)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad (10)$$

$$M = \frac{H}{\rho}. \quad (11)$$

Из (7) и (8) определим кривизну оси нити:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{Q} \frac{dT}{ds}, \quad \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{T} \frac{dQ}{ds}.$$

Приравняем эти выражения и после интегрирования получим первый интеграл

$$T^2 + Q^2 = C.$$

Для того, чтобы найти произвольную постоянную  $C$ , используем наши предположения о силах, действующих в точке  $A$ . Отсчет угла  $\alpha$  ведем от направления  $T_1$ , то есть в точке  $A$   $\alpha = \alpha_0$ . Раскладывая силу  $T_1$  на касательную и нормальную, записываем

$$T|_{\alpha=\alpha_0} = T_1 \cos \alpha_0, \quad Q|_{\alpha=\alpha_0} = \pm T_1 \sin \alpha_0.$$

Знак  $\pm$  выбран потому, что направление перерезывающей силы пока неизвестно, хотя предположение о действии поперечных сил было нами высказано выше при рассмотрении равновесия элемента нити.

Тогда имеем

$$T^2 + Q^2 = T_1^2. \quad (12)$$

Из последнего соотношения выразим  $Q$  через  $T$  и подставим в (7). С учетом (10) получим

$$\frac{1}{\sqrt{T_1^2 - T^2}} \frac{dT}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (13)$$

После интегрирования имеем

$$\arcsin \frac{T}{T_1} = \alpha + C \quad \text{или} \quad \sin(\alpha + C) = \frac{T}{T_1}.$$

В точке  $A$  угол  $\alpha = \alpha_0$ , натяжение, с одной стороны, равно  $T = T_1 \cos \alpha_0$ , с другой – из последнего равенства  $T = T_1 \sin(\alpha + C)$ . Тогда новая произвольная постоянная равна  $C = \frac{\pi}{2}$ .

С учетом этого выражение для перерезывающей силы принимает вид

$$Q = T_1 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -T_1 \sin \alpha. \quad (14)$$

Видно, что наше предположение о направлении силы  $Q$  от центра кривизны подтвердилось. Кроме того, следует иметь в виду, что выражения для касательной силы  $T$  (натяжения) и поперечной силы  $Q$  можно было бы получить, не прибегая к дифференциальным уравнениям. Для этого достаточно было бы рассмотреть равновесие конечного элемента первого участка нити (рис. 6).

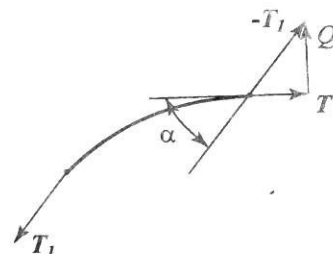


Рис. 6

Из рис. 6, где показано графическое определение натяжения и перерезывающей силы, следует, что  $T = T_1 \cos \alpha$ ,  $Q = -T_1 \sin \alpha$ , и это полностью совпадает с соотношениями, полученными из дифференциальных уравнений. Но аналитическое определение является более предпочтительным, так как исключает элементы субъективизма, которые, как показывают многие работы в этой области, в том числе и приведенные в списке литературы, присутствуют при рассмотрении равновесия элемента нити. Ведь даже в случае неправильного направления той или иной силы аналитический подход выявит эту неточность.

Подставим выражение для  $Q$  в (9):

$$\frac{dM}{ds} = T_1 \sin \alpha.$$

Поскольку

$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\alpha} = \frac{M}{H} \frac{dM}{d\alpha},$$

то последнее уравнение записывается в виде

$$\frac{MdM}{ds} = T_1 H \sin \alpha.$$

Интегрируя, получаем

$$M^2 = -2T_1 H \cos \alpha + C.$$

Принимая во внимание, что в точке А изгибающий момент  $M = 0$  и  $\alpha = \alpha_0$ , имеем  $C = 2T_1 H \cos \alpha_0$ .

Окончательно

$$M^2 = 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha). \quad (15)$$

Обозначим значение угла  $\alpha$  в точке В через  $\gamma_1$ :

$$\gamma_1 = \alpha_B. \quad (16)$$

Тогда в сечении В имеем

$$T_{B1} = T_1 \cos \gamma_1, \quad Q_{B1} = -T_1 \sin \gamma_1, \quad M_{B1}^2 = 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \gamma_1). \quad (17)$$

Вследствие того, что кривизна оси нити является непрерывной функцией (сосредоточенные моменты отсутствуют), радиус кривизны в точке В равен R и

$$M_{B1} = \frac{H}{R}. \quad (18)$$

Подставив в (17), найдем  $\gamma_1$ :

$$\frac{H^2}{R^2} = 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \gamma_1).$$

Отсюда

$$\cos \gamma_1 = \cos \alpha_0 - \frac{H}{2T_1 R^2}. \quad (19)$$

Введем безразмерный коэффициент подобия:

$$k = \frac{H}{2T_1 R^2}. \quad (20)$$

Этот коэффициент характеризует поведение нити в зависимости от жесткости, натяжения и радиуса цилиндра. Увеличение радиуса или натяжения равносильно уменьшению жесткости. Случай абсолютно гибкой нити соответствует  $k = 0$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Огibalов П.М., Рабинович А.Л., Федотов Н.М. О силах взаимодействия между тросом и шкивом. Прикладная математика и механика. – 1939, т. 3. Вып. 3. С.111...123.
2. Каган В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М., 1984.
3. Wei M., Rongjuan Chen. // Text. Res. J. – 68(7), 1998. P. 487...492.
4. Лапшин А. Б., Пашиин Е. Л. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2001, №4. С.13...17.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов МГТА им. А.Н.Косыгина. Поступила 16.12.02.