

УДК 677.021

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ВОЛОКНА, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩЕГО С ВРАЩАЮЩИМСЯ БИЛОМ

С.Н.РАЗИН

(Всероссийский научно-исследовательский институт по переработке лубяных культур)

Одной из проблем, связанной с получением модифицированного (котонизированного) волокна из отходов трепания льна, является неповреждаемость элементарных льняных волокон. Решить эту проблему можно с помощью обоснования рациональной конструкции технического устройства для модификации.

Устройство для штапелирования лубяного волокна в ленте [1] предназначено для переработки ленты, полученной из короткого льняного волокна. Схема взаимодействия рабочих органов с лентой представлена на рис.1, где 1 – валковая пара; 2 – лента; 3 – била.

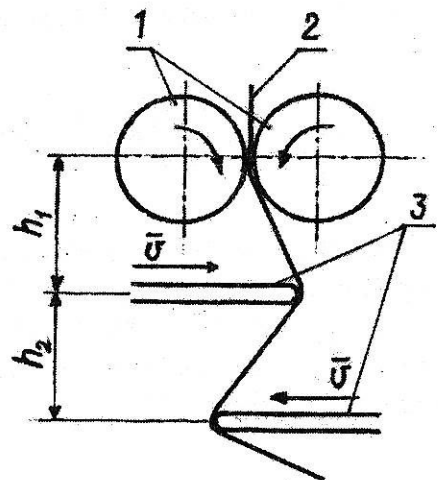


Рис. 1

Ранее [2] получены формулы, позволяющие определить усилия в волокне при его взаимодействии с одним, поступательно движущимся билом. При этом считалось, что движение участка ОА не оказывает влияния на натяжение волокна.

В [3] получены уравнения, описывающие движение участка ОА волокна при его взаимодействии с поступательно движущимся билом, решение которых позволило установить, что вращательное движение участка ОА вносит значительный вклад в силу натяжения волокна.

В реально существующем устройстве волокно взаимодействует с вращающимся билом. Получим уравнения, описывающие движение участка ОА волокна для этого случая. При выводе уравнений движения будем полагать, что волокно является гибким (жесткость на изгиб равна нулю), однородным (линейная плотность $\gamma = \text{const}$) и при движении сохраняет прямолинейную форму. Последнее допущение не должно привести к большим ошибкам, поскольку при рассматриваемом взаимодействии

участок волокна ОА будет распрямляться под действием сил инерции.

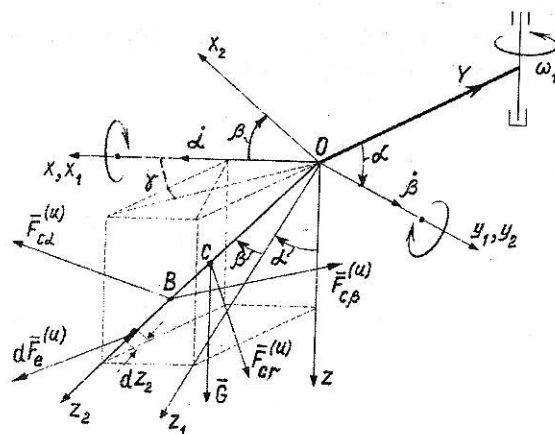


Рис. 2

Рассмотрим движение участка волокна ОА по отношению к системе координат Oxyz, двигающейся вместе с билом (рис.2). Данная система координат не является инерциальной, поэтому теорема об изменении кинетического момента системы [4], [5] примет вид:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} = \sum_{k=1}^n \bar{M}_{kO}^{(e)} + \sum_{k=1}^n \bar{r}'_k \bar{F}_{ke}^{(n)} + \sum_{k=1}^n \bar{r}'_k \bar{F}_{kc}^{(n)} + \sum_{k=1}^n \bar{r}'_k \dot{m}_k \bar{u}_k, \quad (1)$$

где \bar{L}_O – момент количества движения системы относительно точки О; \bar{r}'_k – радиус-вектор точки с номером k в подвижной системе отсчета; \dot{m}_k – скорость изменения массы точки с номером k; \bar{u}_k – абсолютная скорость частиц, отбрасываемых точкой с номером k, в подвижной системе отсчета; $\bar{F}_{ke}^{(n)}, \bar{F}_{kc}^{(n)}$ – соответственно переносная и Кориолисова силы инерции, действующие на точку с номером k; $\sum_{k=1}^n \bar{M}_{kO}^{(e)}$ – сумма моментов внешних сил, относительно центра О.

Свяжем с рассматриваемым участком ленты другую систему координат (расчетную) – Oх2у2z2, которая получается из системы Oxyz, поворотом на угол α вокруг

оси x (система Oх1у1z1) и поворотом вокруг оси у1 на угол β.

Движение в системе Oх2у2z2 удобно рассматривать, так как для участка ленты ОА эти оси являются главными, то есть по отношению к ним центробежные моменты инерции равны нулю, а осевые моменты инерции изменяются только из-за уменьшения длины рассматриваемого участка.

Так, для рассматриваемого случая

$$J_{x2} = J_{y2} = J = ml^2/3 = \gamma l^3/3, \text{ а } J_{z2} = 0.$$

В полученной таким образом системе отсчета уравнение (1) примет вид [6]:

$$\frac{d\bar{L}_O}{dt} + \bar{\omega}' \bar{L}_O = \bar{M}_O, \quad (2)$$

где $\overline{\omega}'$ – угловая скорость вращения системы $Ox_2y_2z_2$ относительно системы $Oxyz$; \overline{M}_O – правая часть уравнения (1).

Запишем уравнение (2) в проекции на оси $Ox_2y_2z_2$, учитывая, что

$$L_{x_2} = J \omega'_{x_2}; \quad L_{y_2} = J \omega'_{y_2};$$

$$L_{z_2} = 0, \quad \omega'_{x_2} = \dot{\alpha} \cos \beta;$$

$$\omega'_{y_2} = \dot{\beta}; \quad \omega'_{z_2} = \dot{\alpha} \sin \beta$$

После некоторых преобразований, получим

$$\begin{cases} \ddot{\alpha} \cos \beta + \frac{3\dot{\ell}}{\ell} \dot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha} \dot{\beta} \sin \beta = \frac{3}{\gamma \ell^3} M_{x_2}, \\ \ddot{\beta} + \frac{3\dot{\ell}}{\ell} \dot{\beta} + \dot{\alpha}^2 \sin \beta \cos \beta = \frac{3}{\gamma \ell^3} M_{y_2} \end{cases} \quad (3)$$

Определим правые части уравнений движения (3). Решим задачу для случая

отсутствия сил аэродинамического сопротивления. Тогда

$$M_{x_2} = m_{x_2} (\overline{G}) + \sum m_{x_2} (\overline{F}_{ke}^{(i)}) + \sum m_{x_2} (\overline{F}_{kc}^{(i)}), \quad (4)$$

$$M_{y_2} = m_{y_2} (\overline{G}) + \sum m_{y_2} (\overline{F}_{ke}^{(i)}) + \sum m_{y_2} (\overline{F}_{kc}^{(i)}),$$

Последнее слагаемое в формуле (1) моментов относительно осей x_2 и y_2 не дает, так как абсолютная скорость отбрасываемых частиц проходит через точку O . Для определения моментов сил в (4) используем формулы преобразования координат

при переходе от системы $Oxyz$ к системе $Ox_2y_2z_2$:

$$x_2 = x \cos \beta + y \sin \alpha \sin \beta - z \cos \alpha \sin \beta,$$

$$y_2 = y \cos \beta + z \sin \alpha,$$

$$z_2 = x \sin \beta - y \sin \alpha \cos \beta + z \cos \alpha \sin \beta.$$

В этом случае

$$M_{x_2} = -\frac{1}{2} \gamma \ell^2 g \cos \alpha \sin \beta; \quad M_{y_2} = -\frac{1}{2} \gamma \ell^2 g \sin \alpha \sin \beta. \quad (5)$$

Переносные силы инерции, действующие на точки рассматриваемого участка, представляют систему сил, линии действия которых расположены в плоскостях, перпендикулярных оси вращения била, причем все линии действия пересекают эту ось.

Для определения суммы моментов переносных сил инерции выделим на волокне элементарный участок длиной dz_2 , лежащий на расстоянии z_2 от точки O . Тогда

переносная сила инерции, действующая на него:

$$d\overline{F}_e^{(i)} = \gamma \omega^2 \varrho (\sin \Psi \bar{i} - \cos \Psi \bar{j}) dz,$$

где ϱ – расстояние от элемента волокна до оси переносного вращения; Ψ – угол, показанный на рис. 2; ω – угловая скорость била.

Перейдя к осям $Ox_2y_2z_2$ и воспользовавшись формулой $\overline{m}_O (d\overline{F}_e^{(i)}) = \overline{r}_k d\overline{F}_e^{(i)}$,

найдем моменты элементарной силы относительно осей $Ox_2y_2z_2$, интегрируя которые

$$\sum m_{x_2} (\bar{F}_{ke}^{(u)}) = \gamma \omega^2 \frac{\ell^2}{6} (3R + 2\ell \cos \beta \sin \alpha) \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\sum m_{y_2} (\bar{F}_{ke}^{(u)}) = \gamma \omega^2 \frac{\ell^2}{6} (3R \sin \alpha \sin \beta - \ell \cos^2 \alpha \sin 2\beta). \quad (7)$$

Силы инерции Кориолиса, действующие на точки нити, имеют три составляющие, соответствующие составляющим относительной скорости \bar{V}_r , возникающим вследствие изменения углов α ($\bar{V}_{r\alpha}$) и β ($\bar{V}_{r\beta}$), а также по причине изменения расстояния до точки О, которое зависит от изменения длины участка ОА волокна (\bar{V}_{rr}).

Первые две составляющие пропорциональны расстоянию от элемента волокна до точки О, поэтому Кориолисовы силы инерции, соответствующие им, будут распределены по линейному закону. Поскольку эти силы представляют систему парал-

в пределах от 0 до l , получим

лельных сил, они эквивалентны равнодействующей, линия действия которой проходит через точку В, причем $OB = \frac{2}{3}l$.

Составляющие Кориолисовой силы инерции, возникающие из-за изменения длины участка ОА, представляют систему параллельных сил, равномерно распределенную по длине нити.

Тогда эта система сил эквивалентна равнодействующей, проходящей через центр масс рассматриваемого участка. Опуская промежуточные выкладки, получаем

$$\sum m_{x_2} (\bar{F}_{ke}^{(u)}) = -\frac{2}{3} \gamma \ell^3 \omega \cos \alpha \cos \beta \dot{\beta} - \frac{1}{2} \gamma \ell^2 \dot{\ell} \omega \cos \alpha \sin \beta, \quad (8)$$

$$\sum m_{y_2} (\bar{F}_{ke}^{(u)}) = \frac{2}{3} \gamma \ell^3 \omega \cos \alpha \cos^2 \beta \dot{\alpha} + \frac{1}{2} \gamma \ell^2 \dot{\ell} \omega \sin \alpha. \quad (9)$$

Подставив (5...9) в (4), а затем в (3), получим окончательный вид уравнений движения участка ОА волокна при его взаимодействии с вращающимся билом.

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} \cos \beta + \frac{3\dot{\ell}}{\ell} \dot{\alpha} \cos \beta - 2\dot{\alpha}\dot{\beta} \sin \beta = \\ = \frac{3}{2\ell} \left[-g \sin \alpha + \omega^2 \left(R + \frac{2\ell}{3} \cos \beta \sin \alpha \right) \cdot \right. \\ \left. \cdot \cos \alpha - \frac{4}{3} \ell \omega \cos \alpha \cos \beta \dot{\beta} - \dot{\ell} \omega \cos \alpha \sin \beta \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta} + \frac{3\dot{\ell}}{\ell} \dot{\beta} + \frac{1}{2} \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta = \\ = \frac{3}{2\ell} \left[-g \cos \alpha \sin \beta - \omega^2 \left(R \sin \alpha \sin \beta - \frac{\ell}{3} \cos^2 \alpha \cdot \right. \right. \\ \left. \left. \cdot \sin 2\beta \right) + \frac{4}{3} \ell \omega \cos \alpha \cos^2 \beta \dot{\alpha} + \dot{\ell} \omega \sin \alpha \right]. \end{aligned}$$

При этом длину участка ОА можно найти по формуле:

$$\ell = \ell_0 - \sqrt{v^2 t^2 + h_1^2} - \sqrt{4v^2 t^2 + h_2^2},$$

где $\ell_0 = 0,06$ м – начальная длина волокна; $v = 70$ м/с – скорость била.

В реально существующем устройстве $\omega=200 \text{ с}^{-1}$; $R=0,35 \text{ м}$; $h_1=0,02 \text{ м}$; $h_2=0,02 \text{ м}$.

Решение данной системы дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ при начальных условиях $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 0$, $\dot{\alpha}_0 = 0$, $\dot{\beta}_0 = v/\ell_0$ показывает, что за время, соответствующее перемещению волокна из вертикального положения в горизонтальное (когда оно начинает скользить по нижней поверхности била), угол γ изменяется от 0 до 6° .

Это позволяет сделать вывод о том, что при исследовании движения волокна, взаимодействующего с билем, изменением этого угла можно пренебречь, то есть считать, что волокно движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной билу. Из этого следует, что влиянием переносной и Кориолисовой силы инерции на движение волокна при изучаемом режиме работы устройства можно пренебречь.

Таким образом, при изучении напряженного состояния обрабатываемого волокна при данных режимах работы устройства задачу о взаимодействии волокна с билем можно рассматривать как плоскую, что значительно упрощает решение, связанное с обоснованием рациональных конструктивных параметров устройства для модификации льняного волокна в ленте, поскольку в этом случае движение волокна описывается всего одним уравнением, полученным в [3].

ВЫВОДЫ

1. Установлено, что взаимодействие волокна с билем происходит по двум, принципиально различным схемам: волок-

но вращается вокруг кромки била; волокно скользит по нижней плоскости била.

2. Получены уравнения, описывающие движение волокна при его взаимодействии с вращающимся билем, которые позволили установить, что интервалы времени, соответствующие взаимодействию по вышеназванным схемам имеют один порядок; за время захлестывания волокна от вертикальной плоскости, перпендикулярной билу, отклоняется незначительно.

3. При определении сил натяжения в волокне на этапе захлестывания можно считать, что волокно движется в вертикальной плоскости, перпендикулярной билу; то есть использовать уравнение движения, полученное в [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Патент РФ 99107105/12. Устройство для штапельирования льняного волокна в ленте / Пашин Е.Л. – Оpubл. 1999. Бюл. №34.
2. Коробельников Р.В., Коробельников А.Р. // Вестник КГТУ. – Кострома, 1999, №1.
3. Разин С.Н., Пашин Е.Л. Влияние движения свободного участка волокна на натяжение при его взаимодействии с поступательно движущимся билем // Мат. Междунар. научн. конф.: "Лен-2000." – Кострома, КГТУ, 2000. С.32...33.
4. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. – Часть II. – М.: Просвещение, 1966.
5. Голубева О.В. Теоретическая механика. – М.: Высшая школа, 1968.
6. Кошляков В.Н. Задачи динамики твердого тела и прикладной теории гироскопов. Аналитические методы. – М.:Наука, 1985.

Рекомендована отделом технологии, оборудования и организации безотходных производств. Поступила 25.11.02.