

УДК 677-486.2:539.311

**УТОЧНЕНИЯ И ДОПОЛНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ
О РАВНОВЕСИИ УПРУГОЙ НИТИ НА ЦИЛИНДРЕ***

В.М. КАГАН, В.П. ЩЕРБАКОВ

**(Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности,
Московский государственный текстильный университет им. А.Н.Косыгина)**

В продолжение [1] изучим состояние нити на участке 2. Здесь радиус оси нити остается постоянным, равным R . Тогда

$$M = \frac{H}{R} = \text{const.} \quad (1)$$

Из (9) следует, что на всем участке контакта $2 Q = 0$. Из второго уравнения системы (2) находим нормальную реакцию поверхности цилиндра на нить:

$$f_n = N = -\frac{T}{R}. \quad (2)$$

При условии, что трение подчиняется закону Амонтона, получим

$$f_t = -\mu N = -\mu \frac{T}{R}.$$

Подставим в первое уравнение системы [1 (2)]:

$$\frac{dT}{ds} = \mu \frac{T}{R}.$$

С учетом $ds = R d\alpha$ после интегрирования имеем

$$T = Ce^{\mu\alpha}.$$

При $\alpha = \gamma_1$ $T = T_{B2}$ (T_{B2} – касательная сила в точке В на втором участке).

Тогда

$$T = T_{B2} e^{\mu(\alpha - \gamma_1)}. \quad (3)$$

Условия сопряжения участков 1 и 2. Анализ формул [1 (17)] и (1...3) показывает, что в точке В изгибающий момент непрерывен, в то время как перерезывающая сила претерпевает разрыв. В точке В на втором участке сила $Q = 0$, а на первом имеет конечное значение. Это означает, что в точке В существует сосредоточенная реакция (сила) Q_B :

$$Q_{B1} = Q_{B2} + Q_B. \quad (4)$$

Отсюда $Q_B = -T_1 \sin \gamma_1$.

Наличие сосредоточенной нормальной силы в точке В входа нити на поверхность цилиндра приводит к возникновению сосредоточенной касательной силы трения:

$$T_B = \mu Q_B = -\mu \sin \lambda_1.$$

Тогда

* Окончание. Начало см. в №2 за 2003 г.

$$T_{B2} = T_{B1} + T_B = -T_1 (\mu \sin \gamma_1 + \cos \gamma_1). \quad (5) \quad \varphi_{BC} = \varphi - \gamma_1 - \gamma_2.$$

Пусть угол охвата нитью цилиндра в предположении, что нить является абсолютно гибкой, равен φ . Действительный угол контакта φ_{BC} упругой нити с цилиндром меньше φ на величину $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, где γ_2 – угол между касательной к оси нити в точке С и направлением силы T_2 , то есть

$$T_{C3} = T_2 \cos \gamma_2, \quad Q_{C3} = -T_2 \sin \gamma_2, \quad M_{C3}^2 = 2A_{33} T_2 (\cos \alpha_1 - \cos \gamma_2), \quad (7)$$

где α_1 – угол между касательной к нити в точке D и направлением силы T_2 .

Из рассмотрения условий сопряжения участков 1 и 2 мы вынуждены признать существование в точке С сосредоточенной

$$T_{C3} = T_{C2} + T_C = \mu T_2 \sin \gamma_2 + T_1 (\cos \gamma_1 + \mu \sin \gamma_1) e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}.$$

Подставив T_{C3} из (7), получим

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \gamma_1 + \mu \sin \gamma_1}{\cos \gamma_2 - \mu \sin \gamma_2} e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (8)$$

Угол γ_2 зависит от силы T_2 . Эта зависимость аналогична выражению [1 (19)]:

$$\cos \gamma_2 = \cos \alpha_1 - \frac{H}{2T_2 R^2} = \cos \alpha_1 - k \frac{T_1}{T_2}. \quad (9)$$

В равенства [1 (19)] и (9) входят значения α_0 и α_1 . Для их определения надо получить уравнения формы оси нити на свободных участках 1 и 2. Форма упругой линии зависит от длины нити, то есть от расстояния точек приложения сил T_1 и T_2 от центра окружности, огибаемой нитью. Если принять, что это расстояние достаточно велико, то можно считать, что $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$ и $\cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 = 1$. Тогда выражения [1 (19)] и (9) упростятся:

$$\cos \gamma_1 = 1 - k, \quad \cos \gamma_2 = 1 - k \frac{T_1}{T_2}. \quad (10)$$

Касательная сила T в точке С в конце второго участка равна

$$T_{C2} = T_1 (\mu \sin \gamma_1 + \cos \gamma_1) e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (6)$$

Рассмотрение участка 3 не отличается от изучения участка 1. В точке С получим

нормальной силы $Q_C = T_2 \sin \gamma_2$ и сосредоточенной касательной силы $T_C = \mu T_2 \sin \gamma_2$, то есть

Трансцендентная система уравнений (8) и (10) позволяет найти отношение T_2/T_1 в зависимости от μ , φ и коэффициента подобия k , характеризующего жесткость нити.

Приближенное решение при малых k . Оценить влияние жесткости нити на натяжение ведущей ветви, используя полученные формулы (8) и (10), затруднительно. Однако, принимая во внимание, что наибольший интерес представляет переход от абсолютно гибкой нити к нити, обладающей жесткостью при изгибе, можно линеаризовать зависимость $\frac{T_2}{T_1}(k)$, полагая k малым.

Опуская промежуточные выкладки, получим

$$\frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\varphi} - k(e^{\mu\varphi} - 1)(1 + \mu^2). \quad (11)$$

Поскольку $e^{\mu\varphi} > 1$, увеличение изгибной жесткости нити приводит к уменьше-

нию отношения $\frac{T_2}{T_1}$. При $k = 0$, то есть

для абсолютно гибкой нити, формула (22) переходит в формулу Эйлера. Заметим, что при $\mu = 0$ натяжения ведомой и ведущей ветвей равны ($T_1 = T_2$) как для абсолютно гибкой, так и для жесткой при изгибе нити.

Сравнение (8) с численным решением системы (8) и (10) показывает, что ее погрешность не превышает 5 % при $k < 0,2$.

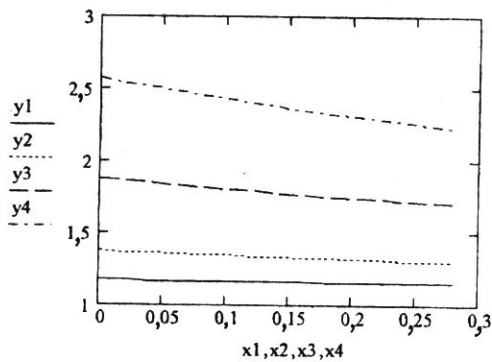


Рис. 1

Графики зависимости отношения $\frac{T_2}{T_1}$ от безразмерного коэффициента подобия k показаны на рис. 1; параметром изображенных функций является коэффициент трения.

Задачу можно было бы считать решенной, однако полученное решение требует уточнения. Теория, которой мы воспользовались, не учитывает сдвиговую податливость упругой нити. При выводе уравнений равновесия упругой нити были приняты некоторые допущения, в том числе и следующее: поперечные нормальные сечения нити, плоские до деформации остаются плоскими и после деформации. Сечения в действительности не остаются нормальными к искривленной оси нити, а несколько перекашиваются. Возникает дополнительная кривизна, связанная с поперечной силой в сечениях нити.

В большинстве практических задач этой особенностью пренебрегают. Но во всех задачах, где имеет место соприкосновение упругой нити с жесткой поверхностью и возникновение сосредоточенной силы на границе участка прилегания, надо

учесть также и перекося, вызванный поперечными силами. Дело в том, что при наличии сдвига упругая линия нити в точке приложения сосредоточенной силы претерпевает излом. Кроме того, здесь необходимо четкое разграничение между углом наклона касательной θ' к осевой линии и углом поворота поперечного сечения. Ранее мы их отождествляли. Теперь отличие угла поворота сечения от θ' следует учесть. Для этого воспользуемся теорией С. П. Тимошенко [2], где кроме изгибных перемещений учитываются также и сдвиговые деформации.

В технической теории изгиба принимается, что торцевые сечения остаются плоскими. Учтем искривление поперечного сечения, вызванное перерезывающими силами. Влияние формы поперечного сечения учитывается при помощи коэффициента m .

Точное дифференциальное уравнение упругой линии нити в этом случае имеет вид

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{H} + m \frac{dQ}{ds} \quad (12)$$

На участке 1, как и ранее, действительны прежние соотношения:

$$T = T_1 \cos \alpha, \quad Q = -T_1 \sin \alpha,$$

а также уравнение [1 (9)]:

$$\frac{dM}{ds} = -T_1 \sin \alpha \quad (13)$$

Принимая во внимание

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{T}{\varrho} = -\frac{T_1 \cos \alpha}{\varrho},$$

уравнение (12) изогнутой оси нити на участке 1 запишется в виде

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{H} - m \frac{T_1 \cos \alpha}{\varrho}$$

или

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{H(1 + mT_1 \cos \alpha)}. \quad (14)$$

Перейдем в (13) от переменной s к α :

$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{d\alpha} \frac{1}{\varrho} = \frac{dM}{d\alpha} \frac{M}{H(1 + mT_1 \cos \alpha)} = T_1 \sin \alpha$$

или

$$M \frac{dM}{d\alpha} = HT_1 (1 + mT_1 \cos \alpha) \sin \alpha.$$

В точке А имеем $M = 0$, $\alpha = \alpha_0$. Из этих условий определяем произвольную постоянную

Интегрируя, получим

$$C = 2HT_1 \cos \alpha_0 + mHT_1^2 \cos^2 \alpha_0$$

$$M^2 = -2HT_1 \cos \alpha - mHT_1^2 \cos^2 \alpha + C.$$

и получаем

$$M^2 = T_1 H \left[2(\cos \alpha_0 - \cos \alpha) + mT_1 (\cos^2 \alpha_0 - \cos^2 \alpha) \right]. \quad (15)$$

Теперь запишем соотношения для всех сил и момента в сечении В на первом участке:

$$T_{B1} = T_1 \cos \gamma_1, \quad Q_{B1} = -T_1 \sin \gamma_1, \\ M_{B1}^2 = 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \gamma_1) \left[1 + \frac{mT_1}{2} (\cos \alpha_0 + \cos \gamma_1) \right].$$

В отличие от случая, когда $m = 0$, кривизну оси нити нельзя считать непрерывной функцией, причем даже тогда, когда M и Q непрерывны. В уравнение (12) для кривизны входит производная $\frac{dQ}{ds}$, которая в соответствии со вторым уравнением системы [1 (2)] зависит от нормальной силы f_n . Но f_n имеет разрыв в точке В, поэтому и кривизна оси нити в этой точке претерпевает разрыв.

Обратимся к участку 2 и рассмотрим условия равновесия на этом участке контакта. Здесь кривизна нити остается посто-

янной и $ds = R d\alpha$. Примем в качестве независимой переменной угол α . Уравнение (12) будет следующим:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{H} + m \frac{dQ}{R d\alpha}. \quad (16)$$

К этому уравнению добавим три уравнения [1 (2)], в которых ϱ заменим на R и ds на $R d\alpha$. Последовательно получим

$$\frac{dT}{d\alpha} = Q + \mu f_n R, \quad \frac{dQ}{d\alpha} = -T + f_n R, \quad \frac{dM}{d\alpha} = -QR. \quad (17)$$

Теперь найдем уравнение относительно перерезывающей силы Q . Из (16) следует

$$\frac{dM}{d\alpha} = -\frac{mH}{R} \frac{d^2 Q}{d\alpha^2}.$$

С помощью третьего выражения (17) исключим M и получим

$$\frac{d^2 Q}{d\alpha^2} - \frac{R^2}{mH} Q = 0. \quad (18)$$

Введем обозначение

$$k_2 = \frac{R}{\sqrt{mH}} = \frac{1}{2\sqrt{kk_1}}. \quad (19)$$

Найдем общее решение уравнения (18):

$$Q = -C_1 e^{-k_2(\alpha-\gamma_1)} + C_2 e^{-k_2(\varphi-\gamma_2-\alpha)}.$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{T_1 \sin \gamma_1 + T_2 \sin \gamma_2 e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)}}{1 - e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)}}, \\ C_2 &= \frac{T_2 \sin \gamma_2 + T_1 \sin \gamma_1 e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)}}{1 - e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)}}. \end{aligned} \quad (20)$$

Теперь найдем натяжение T . Возвращаясь к первому из уравнений (17), получим

$$f_n = \frac{1}{\mu R} \left(\frac{dT}{d\alpha} - Q \right).$$

Подставим найденное значение нормальной силы во второе уравнение этой же системы:

$$\frac{dQ}{d\alpha} = -T + \frac{1}{\mu} \left(\frac{dT}{d\alpha} - Q \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\alpha} - \mu T = Q + \mu \frac{dQ}{d\alpha} = & (-C_1 + \\ & + \mu k_2 C_1) e^{-k_2(\alpha-\gamma_1)} + C_2 (1 + \mu k_2) e^{-(\varphi-\gamma_2-\alpha)} \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \frac{dT}{d\alpha} - \mu T = & C_1 (\mu k_2 - 1) e^{-k_2(\alpha-\gamma_1)} + \\ & + C_2 (\mu k_2 + 1) e^{-k_2(\varphi-\alpha-\gamma_2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T = T_1 \cos \gamma_1 e^{\mu(\alpha-\gamma_1)} + \frac{C_1 (1 - \mu k_2)}{\mu + k_2} \left[e^{k_2(\alpha-\gamma_1)} - e^{\mu(\alpha-\gamma_2)} \right] + \\ + \frac{C_2 (\mu k_2 + 1)}{k_2 - \mu} \left[e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)} - e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)} e^{\mu(\alpha-\gamma_1)} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Произвольные постоянные вычислим из условия непрерывности перерезывающей силы:

при $\alpha = \gamma_1$, $Q = Q_{B1} = -T_1 \sin \gamma_1$, при $\alpha = \varphi - \gamma_2$ $Q = Q_{C3} = T_2 \sin \gamma_2$.

Имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} -C_1 + C_2 e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)} &= -T_1 \sin \gamma_1, \\ -C_1 e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)} + C_2 &= T_2 \sin \gamma_2. \end{aligned}$$

Решая их, находим

Общее решение этого уравнения:

$$\begin{aligned} T = C_3 e^{\mu(\alpha-\gamma_1)} + \frac{C_1 (1 - \mu k_2)}{\mu + k_2} e^{-k_2(\alpha-\gamma_1)} + \\ + \frac{C_2 (\mu k_2 + 1)}{k_2 - \mu} e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Произвольная постоянная определяется из условия, что при $\alpha = \gamma_1$ натяжение $T = T_1 \cos \gamma_1$. При этом получим

$$\begin{aligned} C_3 = T_1 \cos \gamma_1 - \frac{C_1 (1 - \mu k_2)}{\mu + k_2} - \\ - \frac{C_2 (\mu k_2 + 1)}{k_2 - \mu} e^{-k_2(\varphi-\gamma_1-\gamma_2)}. \end{aligned}$$

Натяжение определяется выражением (21) после подстановки значения C_3 :

На конце участка прилегания при $\alpha = \varphi - \gamma_2$ натяжение $T = T_2 \cos \gamma_2$:

$$T_2 \cos \gamma_2 = C_3 e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} + \frac{C_1(1 - \mu k_2)}{\mu + k_2} e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} + \frac{C_2(\mu k_2 + 1)}{k_2 - \mu}. \quad (23)$$

Это уравнение определяет зависимость между натяжением ведущей T_2 и ведомой T_1 ветвей нити. Но нам недостает еще двух уравнений для определения γ_1 и γ_2 .

Эти уравнения получаем из условия непрерывности изгибающего момента. Из (16) с учетом производной $\frac{dQ}{d\alpha}$ имеем

$$M = \frac{H}{R} + \frac{Hmk_2}{R} [C_1 e^{-k_2(\alpha - \gamma_1)} + C_2 e^{-k_2(\varphi - \gamma_2 - \alpha)}]. \quad (24)$$

При $\alpha = \gamma_1$:

$$M = \frac{H}{R} + \frac{Hmk_2}{R} [C_1 + C_2 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}] = M_{B1} = \sqrt{2HT_1(\cos \alpha_0 - \cos \gamma_1) \left[1 + \frac{mT_1}{2}(\cos \alpha_0 + \cos \gamma_1) \right]}. \quad (25)$$

Аналогичное условие можно записать и при $\alpha = \gamma_2$.

Будем полагать, что силы T_1 и T_2 приложены на достаточно большом расстоянии от огибаемого цилиндра, что соответствует обычному нагружению нити при

взаимодействии ее с поверхностями рабочих органов текстильных машин. Тогда можно принять $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и получить два дополнительных уравнения:

$$H + Hmk_2 [C_1 + C_2 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}] = R \sqrt{2HT_1(1 - \cos \gamma_1) \left[1 + \frac{mT_1}{2}(1 + \cos \gamma_1) \right]}, \quad (26)$$

$$H + Hmk_2 [C_1 e^{-k_2(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)} + C_2] = R \sqrt{2HT_2(1 - \cos \gamma_2) \left[1 + \frac{mT_1}{2}(1 + \cos \gamma_2) \right]}. \quad (27)$$

Графики зависимости безразмерного комплекса $\frac{f_n R}{T_1}$ от угла α даны на рис. 2.

На границах участка контакта нити с цилиндром происходит увеличение нормального давления цилиндра на нить, пропорциональное перерезывающей силе в краевом сечении.

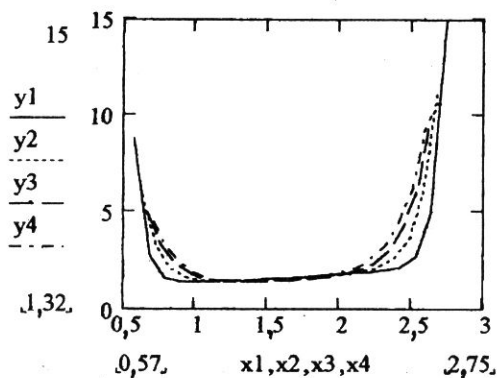


Рис. 2

Только теперь можно считать, что поставленная задача о взаимодействии сопротивляющейся изгибу упругой нити с шероховатым цилиндром решена в достаточной полноте; при этом кроме изгибных перемещений учтены и сдвиговые перемещения, а также сосредоточенные силы на границах участков контакта и излом упругой линии нити в точках приложения сосредоточенных сил.

ЛИТЕРАТУРА

1. Каган В.М., Щербаков В.П. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003. №2. С.86...91.
2. Тимошенко С.П. Сопротивление материалов. – М., 1965, т. 1.2.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов МГТА им. А.Н.Косыгина. Поступила 16.12.02.
