

УДК 539.3/8

РАСЧЕТ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ С ТРЕЩИНОЙ В ПОЛЕ СДВИГАЮЩИХ НАПРЯЖЕНИЙ

В.С. ЯРЫГИН

(Шуйский государственный педагогический университет)

Повышение производительности текстильного оборудования связано с увеличением скоростей и мощностей машин, усложнением их конструкций. При этом применяются новые конструктивные принципы, облегчаются элементы конструкций и уменьшается их жесткость, в свя-

зи с чем возрастают динамические нагрузки и опасность появления и роста трещин.

Исследуем условия роста трещины в тонкостенном элементе текстильной машины. Рассмотрим упругопластическую пластину единичной толщины с трещиной, расположенной в поле сдвигающих на-

пряжений, действующих вдоль границы трещины.

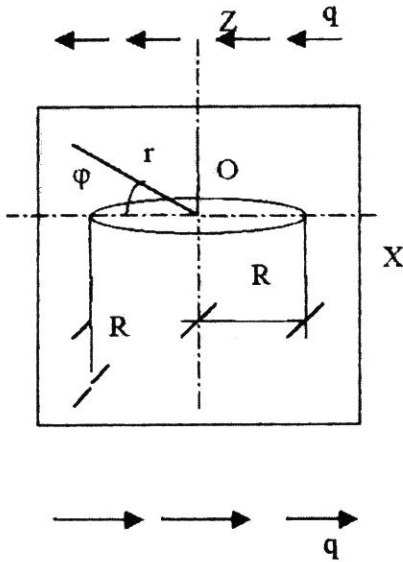


Рис. 1

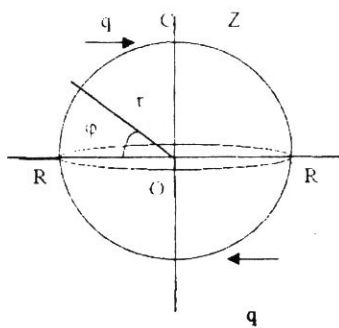


Рис. 2

Вследствие кососимметричного характера возмущающих усилий нагрузка на угловые области трещины распределяется поровну. Половина нагрузки передается за счет растяжения сектора центрального круга $0 < r < R$, $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (рис. 2). Растяжение указанного сектора имеет максимальное значение на оси x при $\varphi=0$ и уменьшается по мере роста угла φ .

Вторая половина нагрузки передается за счет сжатия сектора круга $0 < r < R$, $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, где наибольшее значение сжатия отмечается на оси x . На рис. 3 штриховой линией показано основное поле пере-

Трещина с центром в начале координат и длиной $2R$ свободна по контуру от воздействия внешних усилий (рис. 1). Решение задачи выполним в перемещениях.

Местное поле перемещений рассмотрим в локальной полярной системе координат $r\varphi$. При отсутствии трещины однородное поле напряжений пластины представляется компонентами τ_{xz}, τ_{zx} , имеющими постоянные значения в области, охватывающей начало координат.

Возникновение трещины сопровождается возмущением, связанным с изменением условий работы материала пластины. Края трещины освобождаются от касательных напряжений и нагрузка перераспределяется в области пластины, примыкающие к углу трещины. Здесь касательные напряжения в точках при $r = R$ и $\varphi = 0$ достигают максимальных значений и затухают при удалении от трещины.

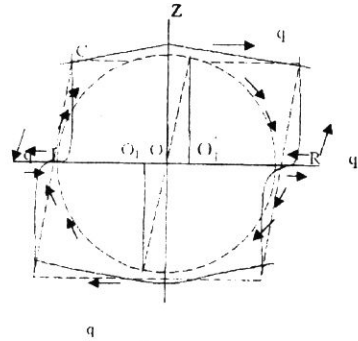


Рис. 3

мещений.

Учитывая условия равенства нулю перемещений края трещины dU_m в угловой точке, получим перемещения точек контура трещины в виде [1]:

$$dU_r = \frac{\alpha_1 C_n}{R^{2n}} \left\{ [kR - (k-1)r]^n - R^n \right\}, \quad (1)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{1}{k^n - 1}, \quad k \geq 2, n > 0.$$

Максимальное перемещение в средней точке трещины запишется так:

$$dU_{r_{\max}} = \frac{\alpha_1 C_n}{R^n} (k^n - 1) = \frac{\pi C_n}{R^n}. \quad (2)$$

При изменении внешней нагрузки q_i на очередном шаге нагружения потенциальная энергия, связанная с приращениями перемещений края трещины, изменится на величину

$$dW'' = \frac{2C_n \alpha_1 dq_i}{R^{2n}} \int_0^R [(2R - r)^n - R^n] dr. \quad (3)$$

Для первых двух членов ряда последнее выражение дает следующие значения:

$$\begin{aligned} n = 1, \quad dW'' &= C_n dq_i, \\ n = 2, \quad dW'' &= 1,777 C_n \frac{dq_i}{R}. \end{aligned} \quad (4)$$

Перемещения края трещины, возникающие в момент разрыва пластины, вызывают смещение точек вдоль оси r и искажение угла поворота силовых линий основного поля. Вследствие этого потенциальная энергия, освобождаемая в областях, примыкающих к границам трещины, описывается соотношением (3) при значениях постоянной $C_n = (A_n + B_n)$, где искажение угла поворота силовых линий контролируется коэффициентом A_n , а смещение точек по оси r – коэффициентом B_n .

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{rn} &= -nB_n r^{-n-1} \sin n\varphi, \\ d\varepsilon_{\varphi n} &= nA_n r^{-n-1} \cos n\varphi_1 + B_n r^{-n-1} \sin n\varphi, \\ \gamma_{r\varphi n} &= nB_n r^{-n-1} \cos n\varphi + A_n r^{-n-1} (-n-1) \sin n\varphi_1. \end{aligned} \quad (6)$$

Приращение поперечной деформации пластины найдем из условия упругого изменения объема:

$$d\varepsilon_{zn} = -\frac{\nu}{1-\nu} [A_n n \cos n\varphi_1 + B_n (1-n) \sin n\varphi] r^{-n-1}, \quad (7)$$

при этом среднее приращение деформации запишется в виде

$$d\theta_n = \frac{1-2\nu}{3(1-\nu)r^{n+1}} [A_n n \cos n\varphi_1 + B_n (1-n) \sin n\varphi], \quad (8)$$

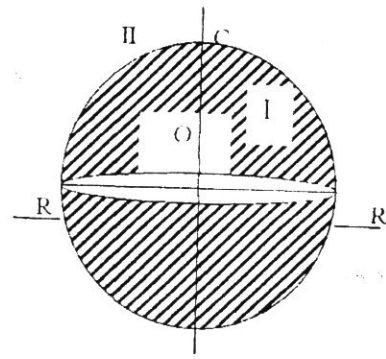


Рис. 4

Приращения перемещений в области II пластины (рис. 4), где происходит затухание возмущения, вызванного появлением трещины, возьмем в форме

$$dU_r = B_n r^{-n} \sin n\varphi, \quad (5)$$

$$dU_\varphi = A_n r^{-n} \sin n\varphi_1.$$

Здесь

$$\varphi_1 = \varphi + \frac{\pi}{2}.$$

Приращения деформаций ступени нагружения, связанные с местным возмущением, запишем для области II в виде:

а компоненты девиатора приращений деформаций в форме

$$\begin{aligned} de_m &= -\frac{1-2\nu}{3(1-\nu)r^{n+1}} \left[A_n n \cos n\varphi_1 + B_n \frac{2n-n\nu-2\nu+1}{1-2\nu} \sin n\varphi \right], \\ de_{\varphi n} &= \frac{1}{3(1-\nu)r^{n+1}} \left[A_n (2n-n\nu) \cos n\varphi_1 + \right. \\ &\quad \left. + B_n (n-2\nu n - \nu + 2) \sin n\varphi \right], \\ de_{zn} &= \frac{\nu+1}{3(1-\nu)r^{n+1}} \left[A_n n \cos n\varphi_1 + B_n (1-n) \sin n\varphi \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Компоненты девиатора приращений деформаций связаны с напряжениями σ_r , σ_φ , $\tau_{r\varphi}$ посредством соотношений Л. Прандтля [2]:

$$\begin{aligned} de_r &= \frac{ds_r}{2G} + \lambda s_r, \\ de_\varphi &= \frac{ds_\varphi}{2G} + \lambda s_\varphi, \\ de_z &= \frac{ds_z}{2G} + \lambda s_z, \\ d\gamma_{r\varphi} &= \frac{d\tau_{r\varphi}}{G} + 2\lambda \tau_{r\varphi}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $s_r = \sigma_r - \sigma_0$, $s_\varphi = \sigma_\varphi - \sigma_0$, $s_z = \sigma_z - \sigma_0$; σ_0 – среднее напряжение; ν – коэффициент поперечной деформации; G – модуль сдвига,

$$\lambda = \frac{3de_{ip}}{2\sigma_i}, \quad (11)$$

а de_{ip} и σ_i – интенсивность приращений пластической деформации и интенсивность напряжений соответственно.

Интенсивность приращений пластической деформации

$$d\varepsilon_{ip} = de_{ip} = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[(d\varepsilon_{\varphi p} - d\varepsilon_{rp})^2 + (d\varepsilon_{\varphi p} - d\varepsilon_{zp})^2 + (d\varepsilon_{rp} - d\varepsilon_{zp})^2 + \frac{3}{2} (d\gamma_{r\varphi p})^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (12)$$

преобразуется к виду

$$d\varepsilon_{ip} = de_{ip} = \frac{\sqrt{2}}{3r^{n+1}} \sqrt{\psi_n \sin^2 n\varphi + \alpha_n \cos^2 n\varphi}, \quad (13)$$

$$\text{где } \psi_n = [A_n n + B_n (1+n)]^2 + \left[A_n \frac{n}{1-\nu'} + B_n \frac{1-n\nu'}{1-\nu'} \right]^2 + \left[A_n \frac{\nu' n}{1-\nu'} + B_n \frac{\nu' - n}{1-\nu'} \right]^2, \quad (14)$$

$$\alpha_n = \frac{3}{2} [A_n (n+1) - B_n n]^2, \quad (15)$$

а ν' – текущее значение коэффициента поперечной деформации.

Напряжения в произвольной точке ме-

стного поля в любой момент деформации $K=m$ запишутся в виде

$$\sigma_{rk} = -\frac{\sqrt{2}\sigma_i(1-2\nu')\left[A_n n + B_n \frac{2n - n\nu' - 2\nu' + 1}{1-2\nu'}\right] \sin n\varphi}{3(1-\nu')\sqrt{\psi_n \sin^2 n\varphi + \alpha_n \cos^2 n\varphi}} +$$

$$+ \frac{E}{3(1-\nu')} \sum_{k=1}^m \sum_1^n [A_n n + B_n (1-n)] \frac{\sin n\varphi}{r^{n+1}}, \quad (16)$$

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{\sqrt{2}\sigma_i [A_n (3n - 3\nu'n + 2\nu' - 1) + B_n (n - 2\nu'n - \nu' + 2)] \sin n\varphi}{3(1-\nu')\sqrt{\psi_n \sin^2 n\varphi + \alpha_n \cos^2 n\varphi}} +$$

$$+ \frac{E}{3(1-\nu')} \sum_{k=1}^m \sum_1^n [A_n n + B_n (1-n)] \frac{\sin n\varphi}{r^{n+1}},$$

$$\tau_{r\varphi k} = \frac{\sigma_i [nB_n - A_n (n+1)] \cos n\varphi}{\sqrt{2(\psi_n \sin^2 n\varphi + \alpha_n \cos^2 n\varphi)}}.$$

Условие упрочнения Хубера-Мизеса запишется в виде [2]:

$$\sigma_i = \Phi(\int d\varepsilon_{ip}), \quad (17)$$

а Φ – функция, описывающая истинную диаграмму растяжения.

В упругой части пластины, а также в зонах разгрузки напряженное состояние в момент деформации K выражается уравнениями, записанными для n -го члена ряда в форме:

$$\sigma_{rk} = \frac{[n\nu A_n + (\nu - n)B_n]E \sin n\varphi}{(1-\nu^2)r^{n+1}},$$

$$\sigma_{\varphi k} = \frac{[nA_n + (1-\nu n)B_n]E \sin n\varphi}{(1-\nu^2)r^{n+1}}, \quad (18)$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{[nB_n - (n+1)A_n]E \cos n\varphi}{2(1+\nu)r^{n+1}}.$$

Текущие значения напряжений зависят от текущих значений σ_i и σ_0 . Значения σ_i определяются по истинной диаграмме растяжения последовательно по ступеням нагружения Δq_i . Значения σ_0 также определяются по ступеням нагружения.

При изменении внешней нагрузки на величину Δq_i на очередном шаге нагружения напряжения получает приращение

$\Delta\sigma$, а деформации $-\Delta\varepsilon$, связанные с приращениями перемещений ΔU . В каждой замкнутой области выполняются равенства типа:

$$\int_V (\Delta\sigma \Delta\varepsilon) dV = \int_F (\Delta q_i \Delta U) dF. \quad (19)$$

Упругую составляющую деформации отбрасывать не следует, так как процесс пластических деформаций протекает в стесненных условиях.

Потенциальная энергия приращений деформаций в области Π – при $r \geq R$:

$$dW' = \int_V (\sigma_r d\varepsilon_r + \sigma_\varphi d\varepsilon_\varphi + \tau_{r\varphi} d\gamma_{r\varphi}) dV, \quad (20)$$

для n -го члена ряда, описывающего процесс развития трещины, запишется в виде:

$$dW' = \frac{E\pi}{2nR^{2n}} \left\{ A_n^2 \left[\frac{n^2}{1-\nu^2} + \frac{(n+1)^2}{2(1+\nu)} \right] + \right.$$

$$\left. + B_n^2 \left[\frac{n^2}{2(1+\nu)} + \frac{1-\nu n}{1-\nu^2} + \frac{n(n-\nu)}{1-\nu^2} \right] \right\}. \quad (21)$$

Для двух первых членов ряда $n=1,2$ это выражение дает следующие результаты:

$$n=1, dW'_1 = \left(2,0703A_1^2 + 1,50961B_1^2\right) \frac{E}{R^2}, \quad (22)$$

$$n=2, dW'_2 = \left(3,0839A_2^2 + 2,2427B_2^2\right) \frac{E}{R^4}.$$

С целью определения постоянных A_n , B_n используем метод Ритца, который дает нам систему уравнений:

$$\frac{\partial(dW' + dW'')}{\partial A_n} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial(dW' + dW'')}{\partial B_n} = 0.$$

Постоянные интегрирования A_n , B_n для двух первых членов ряда, составляющих комбинацию частных решений, имеют значения:

$$A_1 = 0,4830 \frac{qR^2}{E}, \quad A_2 = 0,2882 \frac{qR^3}{E}, \quad (24)$$

$$B_1 = -0,6624 \frac{q}{E} R^2, \quad B_2 = -0,3963 \frac{q}{E} R^3.$$

Так как мы ограничиваемся двумя членами ряда, то дополнительно проведем проверку вариантов на условие равновесия. Для проверки на условие равновесия внутренних усилий следует определить напряжение $\tau_{r\varphi}$ в створе трещины при $\varphi=0$. Согласно формулам (16) и (18) эти напряжения для первых членов ряда $n=1,2$ выражаются в виде

$$\tau_{r\varphi_1} = 0,624q \frac{R^2}{r^2}, \quad (25)$$

$$\tau_{r\varphi_2} = 0,63738q \frac{R^3}{r^3}.$$

Условие равновесия дает выражение

$$\int_R^\infty 0,624q \frac{R^2}{r^2} dr + \int_R^\infty 0,63738q \frac{R^3}{r^3} dr = qR, \quad (26)$$

которое после вычислений приводит к следующему результату:

$$0,9429q = q. \quad (27)$$

Полученный результат показывает, что расчетная схема, использованная при решении задачи с удовлетворительной степенью приближения, описывает процесс нагружения пластины.

Интенсивность приращений пластической деформации в зоне влияния возмущения, возбуждаемого дефектом, следует определять, учитывая то обстоятельство, что приращения деформаций $d\varepsilon_\varphi$, $d\varepsilon_z$, $d\varepsilon_r$, $d\gamma_{r\varphi}$ складываются из деформаций основного и местных полей:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_r &= d\varepsilon'_r + d\varepsilon''_r, \\ d\varepsilon_z &= d\varepsilon'_z + d\varepsilon''_z, \\ d\varepsilon_\varphi &= d\varepsilon'_\varphi + d\varepsilon''_\varphi, \\ d\gamma_{r\varphi} &= d\gamma'_{r\varphi} + d\gamma''_{r\varphi}. \end{aligned} \quad (28)$$

Разрушение пластины происходит в угловой точке трещины при $\varphi=0$, где интенсивность приращений деформации суммы местного и основного полей деформаций для числа членов ряда $n=m$ определяются выражением

$$d\varepsilon_{in} = \frac{q}{E\sqrt{3}} \left\{ A_0 + \sum_{n=1}^m [A_n(n+1) - B_n n] \right\}, \quad (29)$$

где A_0 описывает деформацию однородного основного поля.

Определим выражение приращения интенсивности деформации в угловой точке трещины для первых двух членов ряда $n=1,2$:

$$d\varepsilon_i = 3,398 \frac{q}{E}. \quad (30)$$

ВЫВОДЫ

Анализ результатов приведенного решения показывает, что разрушение пластины возможно, если напряжение основ-

ного поля будет определяться неравенством

$$q \geq 0,2942\sigma_{\text{в}}$$

Если же

$$q \leq 0,2942\sigma_{\text{т}}$$

то рост трещины останавливается. Здесь $\sigma_{\text{т}}$ и $\sigma_{\text{в}}$ – пределы прочности и текучести материала. В случае промежуточных значений внешней нагрузки q рост трещины останавливается после определенного числа циклов, обусловленного графиком нагружения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ярыгин В.С. Исследование осесимметричной оболочки с трещиной при динамическом нагружении. // Сб. научн. тр.: Надежность и прочность машиностроительных конструкций. – Куйбышев, КпТИ, 1988. С.67...70.
2. Хилл Р. Математическая теория пластичности. – М.: ГИТЛ, 1956.

Рекомендована кафедрой общетехнических дисциплин. Поступила 16.12.02.