УДК 677.31.08.021.16/022

ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ РЕЖИМ ТЕЧЕНИЯ АЭРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОТОКА С МЕСТНЫМИ СОПРОТИВЛЕНИЯМИ

В.Д. ФРОЛОВ, И.В. ФРОЛОВА, Ю.С. ГРИГОРЬЕВА, С.Ю. КАПУСТИН

(Ивановская государственная текстильная академия)

На волокнистый поток, создаваемый дискретизирующим устройством 1 (рис. 1) и заключенный внутри выделенного объема [1], действуют внешние объемные силы, проекции которых, отнесенные к единице массы, равны X, Y, Z.

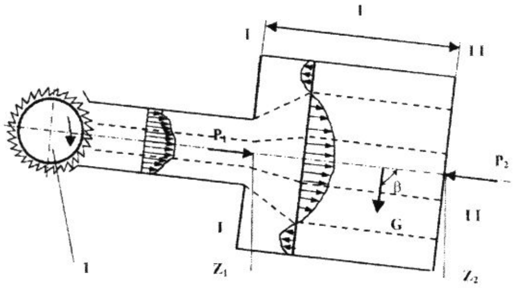

Рис. 1

Рассмотрим прежде всего течение потока на участке его внезапного расширения. Сечения I-I и II-II ограничивают участок потока, на котором происходит это расширение. Выделим две области потока: ядро потока и вихревую область.

Примем, что объемные силы, действующие на поток, имеют потенциал $W(x,y,z)$. Тогда их проекции

$$X = \frac{\partial w}{\partial x},\ Y = \frac{\partial w}{\partial y},\ Z = \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Введем функцию Громеки $P(x,y,z,t)$, частные производные по координатам от которой равны:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\ \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\ .$$

Следовательно, при установившемся движении

$$\partial P = \frac{\partial P}{\partial x}dx + \frac{\partial P}{\partial y}dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz = \frac{\partial P}{\varrho}\ . \quad (1)$$

Подставив полученные значения $\frac{\partial V_x}{\partial t}$, X и $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$ в (1), получим

$$X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t},$$

$$Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial V_y}{\partial t},$$

$$Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial V_y}{\partial t}$$

и будем иметь следующее уравнение:

$$\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial V_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{V^2}{2} + 2(\omega_y V_z - \omega_z V_y).$$

После этого дифференциальные уравнения движения Громеки примут вид

$$
\left.
\begin{aligned}
-\frac{\partial V_x}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(W-P-\frac{V^2}{2}\right)&=2\left(\omega_y V_z-\omega_z V_y\right),\\
-\frac{\partial V_y}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y}\left(W-P-\frac{V^2}{2}\right)&=2\left(\omega_z V_x-\omega_x V_z\right),\\
-\frac{\partial V_z}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\left(W-P-\frac{V^2}{2}\right)&=2\left(\omega_x V_y-\omega_y V_x\right).
\end{aligned}
\right\} \qquad (2)
$$

В случае установившегося движения потока объемные силы имеют потенциал.

Тогда

$$\frac{\partial V_x}{\partial t}=\frac{\partial V_y}{\partial t}=\frac{\partial V_z}{\partial t}=0,$$

а уравнения Громеки (2) запишутся следующим образом:

$$
\left.
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(W-P-\frac{V^2}{2}\right)&=2\left(\omega_y V_z-\omega_z V_y\right),\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(W-P-\frac{V^2}{2}\right)&=2\left(\omega_z V_x-\omega_x V_z\right),\\
\frac{\partial}{\partial x}\left(W-P-\frac{V^2}{2}\right)&=2\left(\omega_x V_y-\omega_y V_x\right).
\end{aligned}
\right\} (3)
$$

Выберем в потоке линию тока и составим ее параметрические уравнения:

$$dx = V_x\,dt,\ \ dy = V_y dt,\ \ dz = V_z\,dt.$$

Умножим левые части уравнений (3) на приращения координат, а правые части тех же уравнений – на равные им приращения $V_x dt$, $V_y dt$, $V_z dt$ и сложим их. В этом случае сумма левых частей будет равна полному дифференциалу от функции (W-P-$\frac{V^2}{2}$), а сумма правых частей равна нулю, то есть

$$d\ (W\text{-}P\text{-}\frac{V^2}{2}) = 0. \qquad (4)$$

Из выражения (4) получим

$$W - P - \frac{V^2}{2} = C_1, \qquad (5)$$

где C_1 – постоянная на данной линии тока. Поскольку движение вихревое, то для разных линий значение C_1 различное. Выражение (5) имеет вид интеграла Бернулли.

Если поток несжимаем, то из уравнения (4) с точностью до произвольной постоянной получаем значение функции Громеки:

$$P = \frac{p}{\varrho}. \qquad (6)$$

Подставив эти значения потенциала объемных сил W и функции Громеки P в интеграл Бернулли (5) и разделив все члены получившегося уравнения на g, получим уравнение Бернулли для линии тока в виде:

$$z + \frac{p}{\gamma} - \frac{V^2}{2g} = C_2. \qquad (7)$$

Откуда для двух любых точек, взятых на одной и той же линии, имеем

$$Z_1 + \frac{P_1}{\gamma} - \frac{V_1^{\ 2}}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{V_2^2}{2g} + h_{\omega 1-2}, \qquad (8)$$

где 1 и 2 – индексы, обозначающие величины, взятые в точках I-I и II-II соответственно.

Для мгновенной линии тока истинное движение согласно уравнению Бернулли будет

$$Z_1+\frac{P_1}{\gamma}+\frac{V_1^{\,2}}{2g}=Z_2+\frac{P_2}{\gamma}+$$

$$+\frac{V_2^2}{2g}+h_{\omega 1-2}+h_{i1-2}, \qquad (9)$$

где $h_{i1-2}=\frac{1}{g}\int_1^2\frac{\partial V}{\partial t}\partial S.$

Умножим обе части данного уравнения на весовые расходы в тех же сечениях, учитывая несжимаемость потока $\gamma\ V_1 d\sigma_1=\gamma_2 V_2 d\sigma_2$, и после суммирования по всему потоку получим следующее выражение:

$$E_1=E_2+\gamma\iint_{\sigma_2}h_{\omega 1-2}V_2 d\sigma_2+$$

$$+\gamma\iint_{\sigma_2}h_{i1-2}V_2 d\sigma_2, \qquad (10)$$

где E_1 и E_2 – мгновенные значения механической энергии потока в сечении I-I и II-II.

После осреднения уравнения (10) за период времени T имеем

$$\frac{1}{T}\int_0^T E_1\partial t=\frac{1}{T}\int_0^T E_2\partial t+$$

$$+\gamma\iint_{\sigma_2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T h_{\omega 1-2}V_2\partial t\right)\partial\sigma_2+$$

$$+\iint_{\sigma_2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T h_{i1-2}V_2\partial t\right)\partial\sigma_2. \qquad (11)$$

В соответствии со следующим выражением

$$\overline{Э}=\overline{Э}_п+\overline{Э}_к=\frac{\overline{E}}{\gamma\sigma}=Z+\frac{\overline{P}}{\gamma}+\frac{\overline{a}\overline{V}^2}{2g}. \quad (12)$$

Осредненная потерянная механическая энергия

$$\gamma\iint_{\sigma_2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T h_{\omega 1-2}V_2 dt\right)=\gamma\iint_{\sigma_2}\left(\overline{h}_{\omega 1-2}\overline{V}_2+\overline{h'_{\omega 1-2}V'}_2\right)d\sigma_2=\overline{h}_{\omega I-II}\gamma\overline{\theta}. \qquad (13)$$

Осредненный поток, определяемый по формуле (13), установившийся. Тогда $\frac{\partial\overline{V}}{\partial t}=0$, а $\overline{h}_i=0$. В этом случае

$$\frac{1}{T}\int_0^T h_{i1-2}V_2 dt=\frac{1}{T}\int_0^T h'_{i1-2}\left(\overline{V}_2+V'_2\right)dt=$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T h'_{i1-2}V'_2 dt=\overline{h'_{i1-2}V'_2}. \qquad (14)$$

Находим потери на участке внезапного расширения:

$$\overline{h}_{\omega I-II}=\left[\left(Z_1+\frac{\overline{P}}{\gamma}\right)-\left(Z_2-\frac{\overline{P}_2}{\gamma}\right)\right]+$$

$$+\frac{\overline{a}_1\overline{U}_1^2-\overline{a}_2\overline{U}_2^2}{2g}. \qquad (15)$$

Для того, чтобы выразить разность между статическими напорами, составим уравнение изменения количества движения в проекциях на оси по его направлению:

$$\overline{K}_{II-II}-\overline{K}_{I-I}=\overline{P}_1-\overline{P}_2+\overline{R}+G\cos\theta, \quad (16)$$

где $\overline{P}_1$ – суммарное давление в сечении I-I; $\overline{P}_2$ – суммарное давление в сечении II-II; $\overline{R}$ – реакция давления со стороны периметра сечения; G – вес волокнистого потока, заключенного между сечениями I-I и II-II.

В результате получим выражение

$$\left.\begin{aligned}\overline{K}=\varrho\overline{V}^2\sigma+\varrho\iint_\sigma\varepsilon^2 d\sigma+\varrho\iint_\sigma\overline{V'}^2 d\sigma=\overline{a}_o K_{cp}=\overline{a}_o\varrho\overline{\theta}\overline{V},\\ a_{\overline{\sigma}}=1+\frac{\iint_\sigma\left(\varepsilon^2+\overline{V'}^2\right)d\sigma}{U^2\sigma}.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

Согласно уравнению (17) имеем

$$\overline{K}_{II-II}-\overline{K}_{I-I}=\overline{a}_{02}\varrho\overline{\theta}_2\overline{U}_2-\overline{a}_{01}\varrho\overline{\theta}_1\overline{U}_1.$$

Поскольку $\overline{U}_{[\sigma]}=\overline{\theta}_1=\overline{U}_2\sigma_2=\overline{\theta}_2$,

то

$$\overline{K}_{II-II}-\overline{K}_{I-I}=\frac{\gamma}{g}\overline{U}_2\sigma_2\left(\overline{a}_{02}\overline{U}_2-\overline{a}_{01}\overline{U}_1\right).\tag{18}$$

Вследствие того, что давления в сечениях I-I и II-II распределяются по гидростатическому закону,

$$P_1=\overline{P}_1\sigma_1\ ,\quad P_2=\overline{P}_2\sigma_2\ ,$$

где $\overline{P}_1$ и $\overline{P}_2$ – давления в центре тяжести этих сечений. Следовательно, реакцию $\overline{R}$ найдем из уравнения

$$\overline{R}=P_1(\sigma_2-\sigma_1).$$

Вес смеси, заключенной между сечениями I-I и II-II, рассчитаем по формуле

$$G=\gamma\ell\sigma_2,$$

где l – длина участка.

Подставив вышеприведенные данные в уравнение (15) и учитывая при этом, что $\ell\cos\beta=Z_1-Z_2$, получим следующее равенство:

$$\left(Z_1+\frac{\overline{P}_1}{\gamma}\right)-\left(Z_2+\frac{P_2}{\gamma}\right)=$$
$$=\frac{\overline{U}_2}{g}\left(a_{02}\overline{U}_2-a_{01}\overline{U}_1\right).\tag{19}$$

Подставив полученную разность гидростатических напоров в (15), запишем

$$h_{\omega I-II}=\frac{\overline{U}_2}{g}\left(a_{02}\overline{U}_2-a_{01}\overline{U}_1\right)+$$
$$+\frac{\overline{a}_1\overline{U}_1^2-\overline{a}_2\overline{U}_2^2}{2g}.\tag{20}$$

При достаточно больших значениях числа Re можно считать, что $a_{01}=a_{02}=1$ и $a_1=a_2=1$.

После преобразования расчет потери напора при внезапном расширении упрощается:

$$\overline{h}_{\omega I-II}=\frac{\left(\overline{U}_1-\overline{U}_2\right)^2}{2g}=\delta_{вр}\frac{\overline{U}_1^2}{2g}=\delta'_{вр}\frac{\overline{U}_2^2}{2g}.$$

При этом коэффициент сопротивления внезапного расширения потока равен

$$\delta_{вр}=\left(1-\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2,\qquad\delta'_{вр}=\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}-1\right)^2.$$

Величина коэффициента δ_i зависит от типа и конструкции местного сопротивления, степени сужения и растяжения за ним и числа Re. С ростом числа Re коэффициент δ_i уменьшается и асимптотически приближается к некоторому постоянному значению.

Таким образом, потеря напора при внезапном расширении потока равна скоростному напору, вычисленному по потерянной скорости согласно теореме Борда. Так как $\overline{U}_1>\overline{U}_2$, то

$$\left(Z_2 + \frac{\overline{P}_2}{\gamma}\right) > \left(Z_1 + \frac{\overline{P}_1}{\gamma}\right),$$

то есть удельная потенциальная энергия в конце участка растекается больше, чем в его начале.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов О.П., Мамченко В.О.* Аэродинамика и вентиляторы. – Л.: Машиностроение, 1986.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 10.07.03.