ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

№ 6 (275) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 2003

УДК 677-486.2:539.311

РАСЧЕТ УПРУГИХ МОДУЛЕЙ И ПРОЧНОСТИ КРУЧЕНОЙ НИТИ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА*

В. П. ЩЕРБАКОВ, И. Б. ЦЫГАНОВ, В. А. ЗАВАРУЕВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Расчет прочности скрученной нити предполагает знание прочности каждого из компонентов [1]. Общий план решения таких задач (определение прочности как одиночной нити, так и скрученной в два и более сложений нити) состоит в следующем: 1) составить уравнения совместности деформаций, то есть соотношения, связывающие деформации отдельных элементов; 2) заменить в уравнениях совместности величины деформаций через напряжения или усилия по закону Гука (или иному закону связи); 3) составить уравнения статики, считая геометрию системы определенной для недеформированного состояния; 4) решить полученную систему уравнений.

Если свойства образца, вырезанного из материала, не зависят от его ориентации, то материал называется изотропным. В противном случае материал называют анизотропным. Анизотропия нитей объясняется их структурой, представляющей собой конструкцию из направленных волокон.

Нить обладает разными механическими свойствами по различным направлениям, расположение волокон создает относительно высокую прочность в направлении оси нити и малую прочность в поперечном направлении. В анизотропной среде под действием одного напряжения σ_{11} могут возникнуть все компоненты деформаций ε_{ij}.

Обобщенный закон Гука для анизотропного материала записывается в виде

$$\sigma_{ij} = C_{ijk\ell}\,\varepsilon_{k\ell}\ ;\ i,\ j,\ k,\ \ell = 1,\ 2,\ 3. \qquad (1)$$

Здесь $C_{ijk\ell}$ – константы упругости материала.

В развернутом виде уравнения выглядят следующим образом:

$$\sigma_{11} = C_{1111}\varepsilon_{11} + C_{1112}\varepsilon_{12} + C_{1113}\varepsilon_{13} + C_{1121}\varepsilon_{21} + C_{1122}\varepsilon_{22} + C_{1123}\varepsilon_{23} + \\ + C_{1131}\varepsilon_{31} + C_{1132}\varepsilon_{32} + C_{1133}\varepsilon_{33},$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\sigma_{12} = C_{1211}\varepsilon_{11} + C_{1212}\varepsilon_{12} + C_{1213}\varepsilon_{13} + C_{1221}\varepsilon_{21} + C_{1222}\varepsilon_{22} + C_{1223}\varepsilon_{23} + \\ + C_{1231}\varepsilon_{31} + C_{1232}\varepsilon_{32} + C_{1233}\varepsilon_{33}.$$

Это константы, связывающие 6 различных компонент σ_{ij} с шестью различными компонентами $\varepsilon_{k\ell}$. Их удобно расположить в виде матрицы 6×6.

В новых обозначениях уравнения записываются в виде:

---

* Начало.

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{13}\varepsilon_3 + C_{14}\varepsilon_4 + + C_{15}\varepsilon_5 + C_{16}\varepsilon_6,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\sigma_4 = C_{41}\varepsilon_1 + C_{42}\varepsilon_2 + C_{43}\varepsilon_3 + C_{44}\varepsilon_4 + + C_{45}\varepsilon_5 + C_{46}\varepsilon_6.$$

Постоянные жесткости нити C_{ij} обусловлены свойствами волокон и расположением их в нити. Исходя из условий формирования нити ее геометрическую модель можно представить в форме прямых полых круговых цилиндров радиуса r, в которых волокна расположены по винтовым линиям с постоянным шагом h. Шаг винтовой линии h не зависит от текущего радиуса нити r. Угол подъема винтовой линии, то есть угол между касательной к винтовой линии и образующей цилиндра, равен ϑ.

Нужно определить модуль упругости нити, если известны элементы матрицы внутренней жесткости нити $[C_{ij}]$. Учитывая структуру нитей, а также принимая во внимание условия их формирования, нити с достаточным приближением к реальности можно рассматривать как тело, через каждую точку которого проходит ось упругой симметрии – ось вращения. Типичным элементом объема будет шестигранная призма, окружающая одно центральное волокно.

Нить обладает гексагональной симметрией, в каждой точке нити имеется одно главное направление и бесконечное множество главных направлений в плоскости, нормальной к первому. Такое тело называется трансверсально-изотропным или монотропным. В нем через все точки проходят параллельные плоскости упругой симметрии, в которых все направления являются упругоэквивалентными (плоскости изотропии). Свойства трансверсально-изотропного материала остаются неизменными при его повороте на произвольный угол относительно оси симметрии и при любом отражении относительно плоскости, содержащей эту ось.

Зависимости между напряжениями и деформациями выражаются с помощью пяти упругих модулей. Если ось x_1 направить вдоль оси нити, то соотношения упругости для нити как трансверсально-изотропного тела запишутся в виде

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{23} & C_{22} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(C_{22}-C_{23})\end{bmatrix} \begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \varepsilon_4\\ \varepsilon_5\\ \varepsilon_6\end{bmatrix}. \qquad (2)$$

Для определения компонент матрицы жесткости $[C_{ij}]$ рассмотрим напряженно-деформированное состояние элемента волокна ℓ_f, выделенного из нити.

Для определения C_{11} рассмотрим деформирование нити в направлении 1 под действием напряжения σ_1 (рис. 1). В соответствии с указанным вначале планом составим уравнение совместности деформаций:

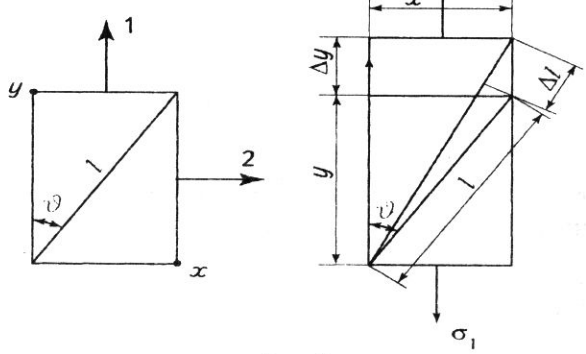

Рис. 1

$$(\ell_f + \Delta\ell_f)^2 = (y + \Delta y)^2 + x^2.$$

Здесь значения x, y без индексов относятся к нити в целом. Преобразуем уравнение к виду

$$\left(1+\frac{\Delta\ell_f}{\ell_f}\right)^2 = \left(1+\frac{\Delta y}{y}\right)^2 \left(\frac{y}{\ell_f}\right)^2 + \left(\frac{x}{\ell_f}\right)^2.$$

Деформация волокна равна $\varepsilon_f = \dfrac{\Delta\ell_f}{\ell_f}$, деформация нити в продольном направлении $\varepsilon_1 = \dfrac{\Delta y}{y}$. Можно написать

$$(1 + \varepsilon_f)^2 = (1 + \varepsilon_1)^2 \cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta.$$

Пренебрегая квадратами деформаций, получим

$$\varepsilon_f = \varepsilon_1 \cos^2\vartheta. \qquad (3)$$

Эта формула написана для отдельного волокна, ориентированного под углом ϑ относительно оси x_1 нити. Геометрическая модель нити предполагает, что волокна располагаются по винтовым линиям с постоянным шагом.

Тогда, как уже было отмечено, шаг винтовой линии h не зависит от текущего радиуса нити r, а угол ориентации отдельного волокна ϑ, равный углу подъема винтовой линии, изменяется вдоль радиуса, достигая на поверхности нити радиуса R величины β. Модуль упругости нити E_x, как и элементы матрицы внутренней жесткости C_{ij}, определяется жесткостью всех волокон. Для такой сложной системы задача решается несравненно проще при помощи энергетических соотношений.

Рассматривая нить как механическую консервативную систему, можно записать

$$A=T+U,$$

где A – работа внешних сил; T – кинетическая энергия движения; U – потенциальная энергия деформации.

Для того, чтобы вычислить величину U, нужно предположить, что внешняя сила прикладывается достаточно медленно и кинетической энергией можно пренебречь. Получим A = U. На элементарном перемещении $d(\Delta L_1)$ работа внешней силы P_1 в направлении оси нити x_1 – при прочих неизменных перемещениях – равна приращению потенциальной энергии деформации всех волокон:

$$P_1 d(\Delta L_1) = \sum_1^N dU_f\,. \qquad (4)$$

Преобразуем написанное соотношение к виду

$$P_1 = \sum_1^N \frac{\partial U_f}{\partial(\Delta L_1)} = \sum_1^N \frac{\partial U_f}{\partial(\Delta\ell_f)} \frac{\partial(\Delta\ell_f)}{\partial(\Delta L_1)}. \qquad (5)$$

Здесь $\dfrac{\partial U_f}{\partial(\Delta\ell_f)}$ представляет собой натяжение волокна P_f, а $\dfrac{\partial(\Delta\ell_f)}{\partial(\Delta L_1)}$ – соотношение между деформацией волокна и нити.

Напишем известные выражения $\Delta\ell_f = \varepsilon_f\ell_f$ и $\Delta L_1 = \varepsilon_1 L_1$. Кроме того, учтем одно важное обстоятельство, связанное со структурой всех текстильных материалов. На практике при расчетах прочности необходимо уметь вычислять напряжения в пряже и волокне.

Прежде всего следует отметить, что определять напряжение в нити и пряже как отношение силы к площади поперечного сечения пряжи (нити) $\pi d_y^2/4$ нельзя, поскольку нагрузку воспринимают только волокна, а в эту формулу площади входят и воздушные пустоты в нити. Нужно учесть лишь площадь волокон, попадающих в поперечное сечение нити, приняв при этом во внимание и расположение волокон под углом ϑ к оси нити, и различную ориентацию волокон в радиальном направлении.

Более предпочтительно использовать удельное напряжение как силу, отнесенную к массе единицы длины. Единицей удельного напряжения является 1 Н/текс. Связь между обычным напряжением и удельным выражается формулой $\sigma = \frac{\sigma_s}{\nu_y}$, где ν_y – удельный объем нити, то есть величина, обратная плотности.

Принимая единицей плотности 1 $\frac{г}{см^3}$, единицу напряжения получаем равной 1 ГПа: удельное напряжение 1 Н/текс = удельный объем $\left(\frac{г}{см^3}\right)^{-1}$ × напряжение 1 ГПа.

Величина ν_y, определяемая экспериментально с большой точностью хорошо разработанными методами физического анализа, складывается из удельного объема волокна ν_f и объема между волокнами в пряже ν_s. Может быть введен вспомогательный параметр – плотность упаковки φ:

$$\varphi = \frac{\nu_f}{\nu_y} = \frac{\nu_f}{\nu_f + \nu_s}.$$

Гексагональная наибольшая плотная упаковка волокон круглого сечения дает φ = 0,907. Для комплексных нитей обычными являются величины φ в интервале (0,7…0,9), снижающиеся до 0,5, а иногда и ниже – у пряжи из натуральных волокон. Числовые значения параметра φ дают представление о величине ошибки в расчете напряжения, если считать нить сплошным телом.

Учитывая сказанное и обозначая удельное напряжение σ_s, выражение (5) запишем в виде

$$\frac{M}{L_1}\sigma_{s1} = \sum_1^N \frac{m_f}{\ell_f}\sigma_{sf}\frac{\ell_f \partial\varepsilon_f}{L_1 \partial\varepsilon_1}. \qquad (6)$$

С учетом того, что все элементы волокна имеют одинаковую массу m_f, осевое удельное напряжение в нити получаем как усреднение напряжений и ориентации каждого волокна:

$$\sigma_{s1} = \left\langle \sigma_{sf}\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\varepsilon_1}\right\rangle. \qquad (7)$$

Рассматривая напряжение как внутреннюю силу, приложенную к волокну, а не к нити со свободным пространством между волокнами, перейдем от удельных напряжений к обычным, умножив обе части равенства (6) на удельный объем волокна.

Имеем

$$\sigma_1 = \left\langle \sigma_f \frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\varepsilon_1}\right\rangle.$$

В случае использования соотношения (3) имеем

$$\frac{\partial\varepsilon_f}{\partial\varepsilon_1} = \cos^2\vartheta.$$

Полагая, что деформирование волокон следует закону Гука $\sigma_f = E_f\varepsilon_f$ (E_f – модуль упругости волокна), находим

$$\sigma_1 = \left\langle E_f\varepsilon_f\cos^2\vartheta\right\rangle = \left\langle E_f\varepsilon_1\cos^2\vartheta\cos^2\vartheta\right\rangle = \left\langle E_f\cos^4\vartheta\varepsilon_1\right\rangle.$$

Отсюда упругий модуль C_{11}:

$$C_{11} = \left\langle E_f\cos^4\vartheta\right\rangle.$$

Проведем усреднение $\cos^4\vartheta$. Разделим нить на цилиндрические элементы радиальной толщины dr и площадью $2\pi r dr$ с углом винтовой линии ϑ. Тогда в результате интегрирования среднее значение $\cos^4\vartheta$ будет иметь вид:

$$\left\langle\cos^4\vartheta\right\rangle = \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\cos^4\vartheta dr.$$

Интеграл можно упростить, введя вместо r новую переменную ϑ, положив

$r = h\frac{tg\vartheta}{2\pi}$. Имеем $dr = \frac{1}{2\pi}\frac{h}{\cos^2\vartheta}d\vartheta$. Кроме того, примем во внимание соотношения: $2\pi R = htg\beta$, $2\pi r = htg\vartheta$. После преобразования подынтегрального выражения к новой переменной и замены пределов получим $\left\langle \cos^4\vartheta \right\rangle = \cos^2\beta$. Следовательно, $C_{11} = E_f\cos^2\beta$.

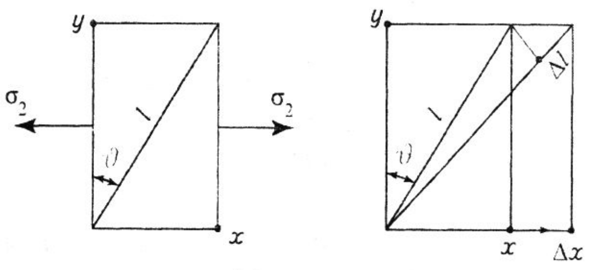

Рис. 2

Рассмотрим деформирование нити в направлении 2 под действием напряжения σ_2 при других неизменных перемещениях (рис. 2). В результате деформирования имеем $(\ell_f + \Delta\ell_f)^2 = y^2 + (x + \Delta x)^2$. Преобразуем это равенство:

$$\left(1 + \frac{\Delta\ell_f}{\ell_f}\right)^2 = \left(\frac{y}{\ell_f}\right)^2 + \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^2\left(\frac{x}{\ell_f}\right)^2$$

или

$$(1 + \varepsilon_f)^2 = \cos^2\vartheta + (1 + \varepsilon_2)^2\sin^2\vartheta.$$

Как и ранее, пренебрегая квадратами деформаций, получим $\varepsilon_f = \varepsilon_2\sin^2\vartheta$. Соотношения (4...6), полученные на основе энергетического метода, после замены индекса 1, соответствующего продольному направлению, на индекс 2, обозначающий поперечное направление, приводят к усреднению вида:

$$\sigma_2 = \left\langle E_f\sin^4\vartheta \right\rangle\varepsilon_2.$$

Имеем

$$\left\langle \sin^4\vartheta \right\rangle \frac{1}{\pi R^2}\int_0^R 2\pi r\sin^4\vartheta dr = 1 + \cos^2\beta + \frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta},$$

то есть

$$C_{22} = E_f\left(1 + \cos^2\beta + \frac{4\ln\cos\beta}{tg^2\beta}\right).$$

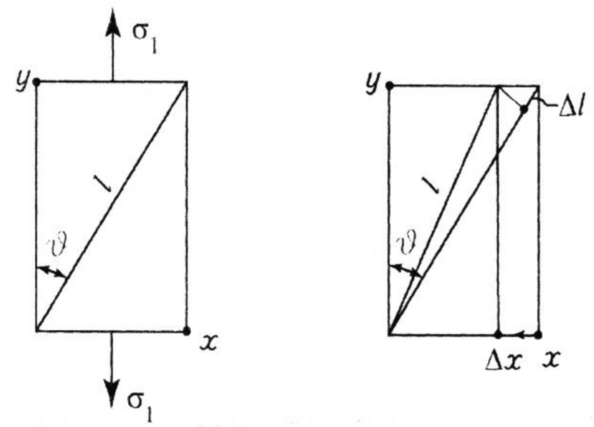

Рис. 3

Рассмотрим деформирование нити в направлении 2 под действием напряжения σ_1 при других неизменных перемещениях (рис. 3). Удлинение нити в осевом направлении под действием напряжения σ_1 сопровождается уменьшением ее поперечных размеров. Поперечная деформация ε_2 пропорциональна продольной ε_1: $\varepsilon_2 = \nu\,\varepsilon_1$, где ν – коэффициент Пуассона.

Из рис. 3 следует:

$$(\ell - \Delta\ell)^2 = y^2 + (x - \Delta x)^2.$$

После преобразований, аналогичных предыдущим, получим $\varepsilon_f = \varepsilon_2\sin^2\vartheta$. В соотношении (6) заменим ε_1 на $\frac{\varepsilon_2}{\nu}$.

В результате определим

$$C_{12} = \left\langle E_f \nu \sin^4 \vartheta \right\rangle =$$
$$= E_f \nu \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\mathrm{tg}^2 \beta} \right).$$

Нить подвергается сдвигу γ под действием касательных напряжений σ_{12} (в матричных обозначениях σ_4). Деформирование элемента показано на рис. 4.

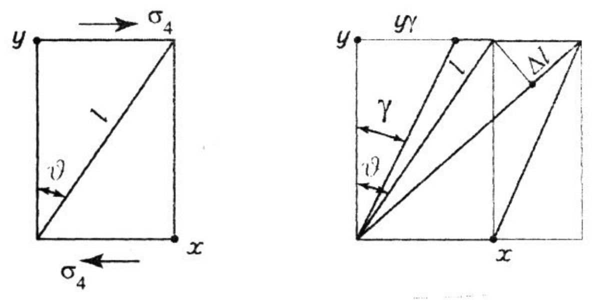

Рис. 4

В этом случае $(\ell_f + \Delta \ell_f)^2 = y^2 + (x + y\gamma)^2$. Преобразуем написанное выражение, как и ранее при рассмотренных случаях деформирования, и получим $\varepsilon_f = \frac{1}{2} \gamma \sin 2\vartheta$.

На элементарном перемещении $d(\Delta x)$ работа силы P_{12} (в сечении, перпендикулярном оси 1 в направлении 2) равна $dA = P_{12} d(\gamma L)$.

Постоянную C_{44} получим из формулы

$$\sigma_4 = E_f \left\langle \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta \right\rangle \gamma .$$

После усреднения имеем

$$C_{44} = E_f \left(-\cos^2 \beta - \frac{2 \ln \cos \beta}{\mathrm{tg}^2 \beta} \right).$$

Упругий модуль $C_{23} = 0$, а постоянная C_{66} не является независимой и равна $C_{66} = \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23})$. Для трансверсально-изотропного тела действительно соотношение $\nu = \frac{C_{12}}{C_{22} - C_{23}}$ и это соответствует найденным упругим постоянным.

Если известны элементы матрицы внутренней жесткости нити $[C_{ij}]$, то можно найти модуль упругости нити, который обозначим через E_1. Для этого рассмотрим одноосное растяжение нити вдоль оси x_1. Уравнения равновесия в нашем случае принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{12}\varepsilon_2 + C_{11}\varepsilon_2 , \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 , \\ 0 &= C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 . \end{aligned} \tag{8}$$

Поскольку модуль упругости нити представляет собой коэффициент пропорциональности между напряжением σ_1 и деформацией ε_1 выразим деформацию ε_2 через ε_1. Получим формулу для определения модуля упругости нити:

$$E_1 = E_f \left(C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22}} \right). \tag{9}$$

Окончательно с учетом найденных упругих постоянных основная формула, необходимая для расчета прочности и жесткости нити, принимает вид

$$E_1 = E_f \left[\cos^2 \beta - 2\nu^2 \left(1 + \cos^2 \beta + \frac{4 \ln \cos \beta}{\mathrm{tg}^2 \beta} \right) \right]. \tag{10}$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А. Н. Косыгина, 2001.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 30.09.03.