

**ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН
С ОГРАНИЧЕНИЕМ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПРИ УПРАВЛЕНИИ ВЫСОТОЙ И ШИРИНОЙ
ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ РЕБЕР**

**OPTIMIZATION OF RECTANGULAR RIBBED PLATES
WITH THE CONSTRAINT OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY
IN THE MANAGEMENT OF THE HEIGHT AND WIDTH
OF CROSS-SECTION OF THE RIBS**

Р.П. МОЙСЕЕНКО, О.О. КОНДРАТЕНКО
R.P. MOISEENKO, O.O. KONDRATENKO

(Томский государственный архитектурно-строительный университет)
(Tomsk State University of Architecture and Construction)
E-mail: GALIA2007@sibmail.com.

Представлен алгоритм оптимизации прямоугольных ребристых пластин при заданной первой частоте собственных колебаний. В качестве параметров управления приняты ширина и высота прямоугольного поперечного сечения ребер. Сформулировано новое свойство оптимальности при варьировании высотой и шириной поперечного сечения ребер. На основе свойства оптимальности составлен итерационный алгоритм, имеющий достаточно устойчивую сходимость. Примеры показывают, что может быть получена существенная экономия материала.

The algorithm optimization of the rectangular ribbed plates with limitation of the first frequency vibration is presented. As parameters of management a width and height of rectangular cross-sectional of ribs are accepted. New property of optimality is set forth at varying in high and breadthways cross-sectional of ribs. On the basis of property of optimality an iteration algorithm is made, having steady enough convergence. Examples show that can be got substantial economy of material.

Ключевые слова: пластина, ребро, частота собственных колебаний, свойство оптимальности.

Keywords: plate, rib, frequency of eigentones, property of optimality.

Поставленная задача имеет теоретическое и практическое значение при проектировании цехов текстильных предприятий со станками, передающими на плиты перекрытия динамическую нагрузку. В литературе представлены работы по оптимизации ребристых пластин при управлении только высотой поперечного сечения h_p или его шириной b_p [1], [2]. Впервые ставится задача одновременного варьирования геометрическими параметрами h_p и b_p ребер (k – число ребер).

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая пластина постоянной заданной толщины h с шарнирными опорами. Пластина подкрепляется односторонними ребрами прямоугольного поперечного сечения, как показано на рис. 1 (расчетная схема ребристой пластины).

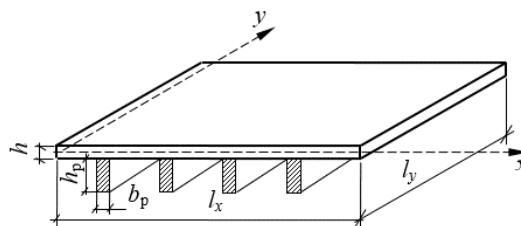


Рис. 1

Материал – упругий, однородный, изотропный. Относительная ширина сечения ребер $V = b_p / l_x$. Относительная высота поперечного сечения ребер $H = h_p / h$. Минимизация веса ребер проводится при ограничении первой частоты собственных колебаний пластины:

$$\omega_1 = \bar{\omega}. \quad (1)$$

Значение $\bar{\omega}$ задается из спектра частот собственных колебаний пластины без ребер. Практически условие (1) реализуется с помощью уравнения частот собственных колебаний [3]:

$$D^* = 0, \quad (2)$$

где D^* – определитель линейных алгебраических уравнений, получаемых энергетическим методом при аппроксимации прогибов w рядом [4]:

$$w = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{l_y}\right). \quad (3)$$

Ряд (3) удовлетворяет граничным условиям на шарнирных опорах. Первый номер частоты собственных колебаний контролируется при решении уравнения (2) использованием наибольшего корня. Общий метод решения поставленной задачи оптимизации основан на применении особых свойств оптимальных конструкций [5]. Это свойство формулируется с помощью метода Лагранжа [6].

Решение задачи. Функция цели – это минимум веса ребер:

$$F = \sum_{i=1}^k V_i H_i - \min. \quad (4)$$

Функция Лагранжа в соответствии с ограничением (2) записывается в виде [6]:

$$L = \sum_i V_i H_i - \lambda D^*. \quad (5)$$

Минимум функции L (5) достигается при условиях:

$$\frac{\partial L}{\partial V_i} = H_i - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial V_i} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_i} = V_i - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial H_i} = 0. \quad (7)$$

Из уравнений (6) и (7) получается условие:

$$\frac{\partial^2 D^*}{\partial V_i \partial H_i} = \frac{1}{\lambda} = \text{const}. \quad (8)$$

Таким образом, получено условие оптимальности (8) ребристой пластины при варьировании высотой и шириной поперечных сечений ребер. Алгоритм использования условия оптимальности (8) аналогичен алгоритмам, представленным в статьях [1], [2]. Для организации вычислительного процесса параметры H_i и V_i выражаются по формулам:

$$H_i = c_i H, \quad (9)$$

$$V_i = d_i V. \quad (10)$$

1. В первом приближении задаются числа $c_i = 1$, $d_i = 1$ и значение параметра $V = V_0$.

2. Условие (2) записывается в развернутом виде:

$$\left| U_0 + V H^3 \sum_{i=1}^k d_i c_i^3 U_i - \bar{\lambda} \left(T_0 + V H \sum_{i=1}^k c_i d_i T_i \right) \right| = 0, \quad (11)$$

где $\bar{\lambda} = \rho h l_x^2 \bar{\omega}^2 / D$; U_i – матрица потенциальной энергии деформации i -го ребра; T_i – матрица кинетической энергии i -го ребра; U_0 – матрица потенциальной энергии деформации пластины без ребер; T_0 – матрица кинетической энергии пластины без ребер; D – цилиндрическая жесткость пластины.

Из уравнения (11) определяется наибольший корень N .

3. При известных значениях B и H вычисляются производные (8):

$$\frac{\partial^2 D^*}{\partial V_i \partial H_i} = D_{BH}^{(i)}.$$

Вторая производная от D^* вычисляется по специально составленной программе, основанной на использовании формулы дифференцирования определителей [7].

4. Вычисляется среднее значение вторых производных (8):

$$D_{BH} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k D_{BH}^{(i)}.$$

5. Вычисляются новые значения коэффициентов c_i и d_i по формулам:

$$c_i^{(t+1)} = c_i^t + \alpha \frac{D_{BH}^{(i)} - D_{BH}}{D_{BH}}, \quad (12)$$

$$d_i^{(t+1)} = d_i^t + \beta \frac{D_{BH}^{(i)} - D_{BH}}{D_{BH}}, \quad (13)$$

где t – номер итерации; $\alpha < 1$ – коэффициент для вычисления высоты поперечного сечения ребра [8]; $\beta < 1$ – коэффициент для вычисления ширины поперечного сечения ребра.

6. При известных значениях c_i , d_i и N из уравнения (11) определяется B .

7. Возврат к пункту 3.

Пример 1. Рассматривается пластина с четырьмя ребрами, как показано на рис. 2 (расчетная схема ребристой пластины на примере 1).

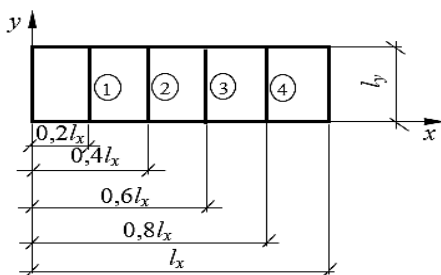


Рис. 2

Расчеты проведены при $m = 7$, $n = 5$ по выражению (3), $\alpha = 0,005$, $\beta = 0,001$. Спектр собственных значений пластины без ребер: $\lambda_1^0 = 100$, $\lambda_2^0 = 169$, $\lambda_3^0 = 324$, $\lambda_4^0 = 625$, $\lambda_5^0 = 1156$.

Ограничение (1) принято в виде $\lambda_1 = \bar{\lambda} = 1000$.

Последовательность выполнения алгоритма

1. $c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = 1$; $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$; $B_0 = 0,03$.

2. При составлении выражения (11) использованы известные формулы, по которым определяются матрицы U_0, T_0, U_i, T_i [9]. Уравнение (11) решается численным методом с определением максимального корня.

3. При заданных по пункту 1 параметрах имеем $N = 3,145975$. Проведено 10 итераций. Получены следующие результаты: $c_1 = c_4 = 1,002668$; $c_2 = c_3 = 0,997332$; $d_1 = d_4 = 1,000533$; $d_2 = d_3 = 0,999466$; $D_{BH}^{(1)} = D_{BH}^{(2)} = D_{BH}^{(3)} = D_{BH}^{(4)} = 4,4684$. $B = 0,02992$; $H = 3,145975$. Функция цели (4) по первому приближению: $F(1) = 0,377517$. Функция цели (4) после 10 итераций: $F(10) = 0,3765$. Сравнение значений функции цели показывает, что при малом количестве ребер начальное приближение является оптимальным.

Пример 2. Рассматривается пластина, показанная на рис. 3 (расчетная схема ребристой пластины на примере 2).

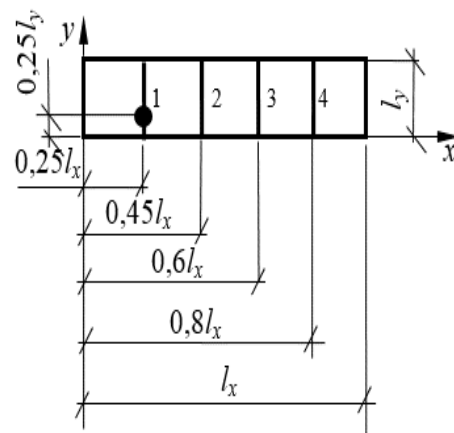


Рис. 3

Коэффициенты равны: $m = 7$, $n = 5$, $\alpha = 0,005$, $\beta = 0,001$. Сосредоточенная масса равна половине массы пластины без ребер. Спектр собственных значений пластины без ребер: $\lambda_1^0 = 41,637$, $\lambda_2^0 = 122,73$, $\lambda_3^0 = 277,465$, $\lambda_4^0 = 548,428$, $\lambda_5^0 = 625$. Огра-

нение (1) принято в виде $\lambda_1 = \bar{\lambda} = 600$. Проведено 150 итераций. Результаты расчета представлены в табл. 1, 2 (табл. 1 – параметры оптимальной ребристой пластины; табл. 2 – вторые смешанные производные от определителя).

Т а б л и ц а 1

B_0	c_1	c_2	c_3	c_4	B	H
0,03	1,409126	0,809522	0,9136	0,86775	0,009448	3,897725
0,04	1,401738	0,81342	0,9147	0,87013	0,012637	3,573775
0,05	1,3946	0,8205	0,9088	0,876	0,015853	3,345125
B_0	d_1	d_2	d_3	d_4	$F(1)$	$F(150)$
0,03	1,081825	0,962	0,98272	0,97355	0,47	0,15
0,04	1,080347	0,96268	0,98294	0,974	0,5718	0,1826
0,05	1,08	0,9641	0,9817	0,9752	0,669	0,214

Т а б л и ц а 2

B	$D_{BH}^{(1)}$	$D_{BH}^{(2)}$	$D_{BH}^{(3)}$	$D_{BH}^{(4)}$
0,03	1,1786	1,171	1,1914	1,17
0,04	1,5666	1,5575	1,5817	1,5571
0,05	2,23	2,16	2,33	2,16

Сравнение значений $F(1)$ и $F(150)$ показывает, что экономия материала составляет 68%. Большой процент экономии объясняется тем, что в примере 2 специально рассматривается пластина с асимметричной формой поперечных колебаний. В этом случае оптимальное распределение материала ребер резко отличается от равномерного распределения, принимаемого в качестве начального по методу итераций.

ВЫВОДЫ

1. Результаты примера 2 показывают, что значение B_0 , принимаемое в первой итерации, влияет на величину F , но не влияет на оптимальное распределение материала между ребрами. На это свойство оптимальной ребристой пластины указывают значения коэффициентов c_i , d_i . При всех значениях B_0 , принятых в примере 2, коэффициенты c_i , d_i практически одинаковы.

2. Полученное свойство оптимальности (8) обеспечивает устойчивый итерационный процесс. Выбор коэффициентов α и β влияет на сходимость итераций. Этот вопрос обсуждается в специальной литературе [8].

3. Разработанный алгоритм оптимизации ребристых пластин является наиболее простым по сравнению с другими методами оптимизации (метод штрафных функций, градиентный метод).

4. Экономия материала в реальных конструкциях зависит от асимметрии расчетной схемы ребристой пластины и может составлять десятки процентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеенко Р.П. Свойства ребристых пластин минимального веса при заданной первой частоте собственных колебаний // Изв. вузов. Строительство. – 2003, № 2. С. 16...19.
2. Моисеенко Р.П., Ботьева И.А. Оптимизация прямоугольных ребристых пластин с заданной первой частотой собственных колебаний при управлении высотой ребер // Строительная механика и расчет сооружений. – 2011, № 3. С. 66...69.
3. Моисеенко Р.П. Оптимизация ребристых тонких пластин при заданной первой частоте собственных колебаний. – Томск: Изд-во Томского гос. архит.-строит. ун-та, 2007.
4. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. – М.: Машиностроение, 1978.
5. Ляхович Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчета сооружений. – Томск: Изд-во Томского гос. архит.-строит. ун-та, 2009.
6. Лазарев И.Б. Основы оптимального проектирования конструкций. Задачи и методы. – Новосибирск: Изд-во СГАПС, 1995.
7. Большой энциклопедический словарь. Математика. – М.: Большая Российская Энциклопедия, 1998.
8. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М.: Наука, 1973.

9. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. – М.: Наука, 1982.

REFERENCES

1. Moiseenko R.P. Svojstva rebristyh plastin minimal'nogo vesa pri zadannoj pervoj chastote sobstvennyh kolebanij // Izv. vuzov. Stroitel'stvo. – 2003, № 2. S.16...19.

2. Moiseenko R.P., Bot'eva I.A. Optimizacija prjamougol'nyh rebristyh plastin s zadannoj pervoj chastotoj sobstvennyh kolebanij pri upravlenii vysotoj reber // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. – 2011, № 3. S. 66...69.

3. Moiseenko R.P. Optimizacija rebristyh tonkih plastin pri zadannoj pervoj chastote sobstvennyh kolebanij. – Tomsk: Izd-vo Tomskogo gos. arhit.-stroit. un-ta, 2007.

4. Alfutov N.A. Osnovy rascheta na ustojchivost' uprugih sistem. – М.: Mashinostroenie, 1978.

5. Ljahovich L.S. Osobyje svojstva optimal'nyh sistem i osnovnye napravlenija ih realizacii v metodah rascheta sooruzhenij. – Tomsk: Izd-vo Tomskogo gos. arhit.-stroit. un-ta, 2009.

6. Lazarev I.B. Osnovy optimal'nogo proektirovanija konstrukcij. Zadachi i metody. – Novosibirsk: Izd-vo SGAPS, 1995.

7. Bol'shoj jenciklopedicheskij slovar'. Matematika. – М.: Bol'shaja Rossijskaja Jenciklopedija, 1998.

8. Myshkis A.D. Lekcii po vysshej matematike. – М.: Nauka, 1973.

9. Donnell L.G. Balki, plastiny i obolochki. – М.: Nauka, 1982.

Рекомендована кафедрой строительной механики. Поступила 15.08.16.