

## ОБЪЕМНЫЕ МОДЕЛИ УПРУГОГО ПОВЕДЕНИЯ КОМПОЗИТА

### THREE-DIMENSIONAL MODEL OF ELASTIC BEHAVIOR OF THE COMPOSITE

В.И. РИМШИН, А.А. ВАРЛАМОВ  
V.I. RIMSHIN, A.A. VARLAMOV

(Научно-исследовательский институт строительной физики  
Российской академии архитектуры и строительных наук,  
Магнитогорский государственный технический университет)  
(Research Institute of Building Physics of the Russian  
Academy of Architecture and Construction Sciences,  
Magnitogorsk State Technical University)  
E-mail: v.rimshin@niisf.ru

*Рассматривается модель упругого поведения композитного материала. За основу взяты модели работы бетона. Модель двухфакторная. Сложные модели предлагается строить с помощью фрактальности. Объемная модель построена на основе изучения плоских моделей. Простая модель состоит из матрицы и шарообразных заполнителей. Модель упрощается за счет объединения заполнителя в одну зону. Модель делится на пластины. Деформации пластин суммируются. Изучены различные варианты зон, образуемых заполнителем. Получены пять форм объемных моделей. Проведено сравнение зависимостей для плоских моделей и объемных моделей.*

*In the article the model of the elastic behavior of the composite material. Based on the model adopted for concrete. The two-factor model. Complex models are invited to build with the help of fractal models. A volumetric model is built based on the study of flat model. A simple model consists of a matrix and spherical fillers. The model is simplified by combining of filler in one area. The model is divided into plates. Deformation of the plates are summarized. Studied different versions of the zones formed by the filler. Considered five forms of volumetric models. Compare dependencies for flat models and volumetric models.*

**Ключевые слова:** объемная модель, модуль упругости, заполнитель, матрица, деформации, структура композита.

**Keywords:** three-dimensional model, elastic modulus, filler, matrix, deformation of the composite structure.

Работа каждой конструкции и материала описываются моделями поведения [1...4]. Структурные модели композитного материала, которым является, например бетон, наиболее понятны и осозаемы. Такие модели позволяют более качественно описать работу конструкции.

Упругая модель бетона – это его ожидаемое мгновенное поведение. С возрастом зона упругой работы бетона увеличивается. Постепенно вся железобетонная конструкция переходит в зону упругой работы. По-

ведение железобетона в этом случае можно полностью моделировать упругой моделью. В работе [5] рассмотрены плоские модели упругого поведения бетона. На основе плоских моделей можно сформулировать исходные положения упругого моделирования объемной модели:

- за исходную модель принимается простая двухфакторная модель бетона [6...8], которая в зависимости от сложности описывается 3...14 параметрами;

- усложнение модели происходит за счет фрактальности построения модели (вложенность моделей по фракциям);

- в качестве заполнителя принимается условная зона, имеющая отличия в упругом поведении от матрицы;

- общую неоднородность материала характеризует расположение заполнителя в матрице;

- так как в процессе работы бетона характеристики и структура его составляющих изменяются, построение модели рассматривается с точки зрения начальной структуры бетона.

Рассмотрим объемную модель бетонной призмы, построенную по аналогии с плоской моделью. Такая модель показана на рис. 1, где на рисунке и далее по тексту:  $E_3$ ,  $E_M$  и  $E_{II}$  – модули упругости заполнителя, матрицы и призмы соответственно.

Для модели, показанной на рис. 1, имеем объем одного шарообразного заполнителя:  $V_{III} = 1/6 \pi D^3$ , объем замещающей фигуры (контуры фигуры показаны на рисунке: эллипсоид с осями  $nD$ ,  $kD$ ,  $mD$ ) –  $V_3 = 1/6 \pi n k m D^3$ . Площадь основания равнообъемной фигуры  $F = (1/6) \pi n k D^2$ . Приведенные относительные упругие деформации такой призмы при действии силы  $P$  запишутся:

$$\varepsilon_{el,P} = \frac{PmD}{aa_1 h E_M} \left( \frac{1}{1 + \frac{(1/6) \pi n k D^2}{aa_1} \left( \frac{E_3}{E_M} - 1 \right)} + \frac{h - mD}{mD} \right). \quad (1)$$

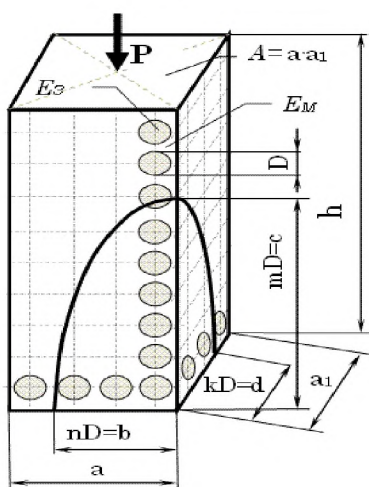


Рис. 1

Для произвольной приведенной объемной фигуры, объединяющей заполнитель, с площадью основания  $F$  и высотой  $c$  относительные продольные деформации призмы при действии силы  $P$  запишутся в следующем виде:

$$\varepsilon_{el,P} = \frac{P}{AE_M} \frac{c}{h} \left( \frac{1}{1 + \frac{F}{A} \left( \frac{E_3}{E_M} - 1 \right)} + \frac{h}{c} - 1 \right). \quad (2)$$

Если считать, что по высоте сечения заполнитель расположен равномерно, то  $c=h$ , и последнее выражение можно переписать:

$$\varepsilon_{el,P} = \frac{\sigma_P}{E_M} \left( \frac{1}{1 + \frac{V_3}{V_b} \left( \frac{E_3}{E_M} - 1 \right)} \right),$$

или

$$\frac{E_M}{E_{II}} = \frac{1}{1 + \frac{V_3}{V_b} \left( \frac{E_3}{E_M} - 1 \right)}, \quad (3)$$

где  $V_3, V_b$  – объемы заполнителя и бетона (призмы) соответственно.

Выражение (3) – аналог выражения для плоской модели при однородном распределении материала [5].

Из рассмотрения модели можно сделать следующие выводы.

1. Однородное распределение заполнителя по высоте призмы можно принять при достаточно большом соотношении размеров сечения призмы и заполнителя.

2. Разница в деформациях возникает при смешивании схем. В этом случае при тонких горизонтальных прослойках между заполнителем, что наиболее вероятно у торцов призмы, возможно возникновение площадок текучести на диаграмме работы материала.

3. Длина площадок текучести определяется контактным упрочнением материала, сжатием и смыканием горизонтальных прослоек.

4. Расчетные схемы для распределения заполнителя предлагается принимать или при контактном расположении заполнителя, или при тонких прослойках между заполнителем. Причем чем меньше размер заполнителя, тем тоньше прослойки следует принимать.

Исходя из того, что ошибка определения линейных размеров призмы значительно выше отношения пластических деформаций к линейному размеру призмы, высоту горизонтальных прослоек в модели при определении упругих характеристик модели можно не учитывать. Тогда для стандартной призмы с шаровидным наполнителем:  $c = h$ , объем наполнителя  $V_3 = 4/3\pi b^2 h/8$ , объем призмы  $V_{\Pi} = a^2 h$ , и соотношение модулей:

$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = 1 / \left[ 1 + \frac{\pi b^2}{6a^2} \left( \frac{E_3}{E_M} - 1 \right) \right]. \quad (4)$$

Для более точного определения деформаций участка призмы высотой  $c$ , показан-

ной на рис. 1, разделим ее по высоте горизонтальными плоскостями на  $q$  одинаковых по высоте пластин высотой  $\delta = c/q$ . При большой величине  $q$  считаем, что боковая поверхность фигуры, образованной горизонтальными плоскостями и боковой поверхностью равнообъемной фигуры матрицы, является призмой. Приведенную площадь (к материалу матрицы) такой призмы можно записать:

$$A_{\text{ред}} = A_3 \frac{E_3}{E_M} + (A_{\Pi} - A_3), \quad (5)$$

где  $A_{\Pi}$ ,  $A_3$ ,  $A$  – площади всего сечения образца и наполнителя соответственно.

Тогда деформации  $i$ -й пластины высотой  $\delta$  при действии силы  $P$  запишутся:

$$\Delta_{\delta} = \delta_i \frac{\sigma_{\text{ред}}}{E_M} = \delta_i \frac{P}{A_3 \frac{E_3}{E_M} + (A_{\Pi} - A_3)} \frac{1}{E_M} = \frac{P}{A_{\Pi} E_M} \frac{\delta_i}{\frac{A_3}{A_{\Pi}} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1}. \quad (6)$$

Суммируя деформации всех пластин,

получим деформацию всей призмы:

$$\sum_{i=1}^{i=q} \Delta_{\delta} = \sum_{i=1}^{i=q} \frac{P}{A_{\Pi} E_M} \frac{\delta_i}{\frac{A_3}{A_{\Pi}} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1} = \frac{P}{A_{\Pi} E_M} \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\delta_i}{\frac{A_3}{A_{\Pi}} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1}. \quad (7)$$

Последнее уравнение можно переписать:

$$\sum_{i=1}^{i=q} \Delta_{\delta} = \varepsilon_{\Pi} c = \frac{\varepsilon_{\Pi} E_{\Pi}}{E_M} \sum_{i=1}^{i=q} \frac{\delta_i}{\frac{A_3}{A_{\Pi}} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1}.$$

Отсюда в пределе при  $q \rightarrow \infty$  и, помещая начало фигуры, образуемой наполнителем, в начало координат, получим:

$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = \frac{1}{c} \int_0^c \frac{dx}{A(x) \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1}. \quad (8)$$

$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = \frac{1}{c} \int_0^c \frac{dx}{\frac{\pi b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{c^2} \right)}{4a^2} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1} = \frac{\eta}{c} \int_0^c \frac{dx}{c^2 + \eta - x^2} = \frac{\eta}{c} \frac{1}{2\sqrt{c^2 + \eta}}, \quad (9)$$

где  $\eta = \frac{1}{\frac{\pi b^2}{4c^2 a^2} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right)} = \frac{4c^2 a^2 E_M}{\pi b^2 (E_3 - E_M)}$ .

Зная, что  $V_{\Pi} = 4ca^2$  и  $V_3 = \frac{4}{3}\pi b^2 c$ , будем иметь:

$$\eta = \frac{1}{\frac{\pi b^2}{c V_{\Pi}} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right)} = \frac{4c^2 E_M V_{\Pi}}{3V_3 (E_3 - E_M)}$$

В последней формуле  $A(x)$  – зависимость, описывающая отношение площади фигуры, образованной наполнителем к площади сечения призмы в сечении с ординатой  $x$ .

Тогда для эллипсоида ( $b=d$ ,  $a=a_1$ ):

$$A(x) = \frac{\pi y^2}{A} = \pi b^2 \left( 1 - \frac{x^2}{c^2} \right) / 4a^2.$$

В этом случае получим:

и 
$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = \left( \frac{2}{3} \frac{V_{\Pi}}{V_3} \frac{E_M}{(E_3 - E_M)} \right) \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{V_{\Pi}}{V_3} \frac{E_M}{(E_3 - E_M)}}}. \quad (10)$$

Если распределение наполнителя вогнутое (рис. 1), тогда в выражении (12)  $E_M$  и  $E_3$  меняются местами.

Так как мы выяснили, что распределение заполнителя в теле призмы играет важную роль и при упругой работе материала, рассмотрим и волнообразное распределение заполнителя. Примем длину волны равную диаметру заполнителя, тогда всю призму разделим по высоте на  $h/D$  частей. Примем  $h = c$ . Объем полученной призмы  $V_{\Pi} = Da^2$  и заполнителя -  $V_3 = \pi k D^3 / 6$ . Тогда в соотношении модулей выражения (10) для каждой части и для всей призмы запишем:

$$\rho = \frac{2}{3} \frac{Da^2}{\frac{\pi k D^3}{6}} \frac{E_M}{(E_3 - E_M)} = \frac{A_{\Pi}}{A_{3, \max}} \frac{E_M}{(E_3 - E_M)}, \quad (11)$$

$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = \frac{1}{h} \int_0^h \frac{dx}{\frac{b \sqrt{(h^2 - x^2)}}{ha} \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right) + 1} = \frac{1}{h} \rho \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(h^2 - x^2)} + \rho}.$$

Введя замену переменных  $x = h \sin t$ ,  $dx = h \cos t dt$  имеем:

$$\begin{aligned} \sqrt{(h^2 - x^2)} &= \sqrt{h^2 - h^2 \sin^2 t} = \\ &= h \sqrt{1 - \sin^2 t} = h \sqrt{\cos^2 t} = h \cos t \end{aligned}$$

и  $t = \arcsin x/h$ . Далее получим:

$$\int \frac{dt}{\cos t + \rho/h} = \frac{1}{\sqrt{1 - (\rho/h)^2}} \ln \frac{1 + \rho/h \cos t + \sqrt{1 - (\rho/h)^2} \sin t}{\rho/h + \cos t} + C.$$

Подставив полученные результаты в исходное уравнение, будем иметь:

$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = \frac{\pi}{2} k - \frac{k^2}{\sqrt{1 - k^2}} \ln \frac{1 + \sqrt{1 - k^2}}{k}, \quad (13)$$

где  $k = \frac{a}{b \left( \frac{E_3 - E_M}{E_M} \right)}$ .

$$\int \frac{dt}{\cos t + \rho/h} = \frac{2}{\sqrt{1 - (\rho/h)^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{\rho/h - 1}{\rho/h + 1}} \tan \frac{t}{2} \right) + C = \frac{2}{\sqrt{1 - (\rho/h)^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{\rho/h - 1}{\rho/h + 1}} \frac{\sin t}{1 + \cos t} \right) + C.$$

Подставляя полученные результаты в исходное уравнение, записываем:

где  $A_{\Pi}$  и  $A_{3, \max}$  – площадь сечения призмы и максимальная площадь сечения заполнителя в сечениях призмы.

Если за исходную возьмем плоскую модель распределения шаров в теле призмы (распределение в призме цилиндров диаметром, равным наибольшему диаметру шара), то при равных объемах получим:

$$\frac{\pi D_{\Pi}^2}{4} D_{\Pi} = \frac{\pi D_{\text{ш}}^3}{6}, \text{ откуда, } D_{\Pi} \cong 0,816 D_{\text{ш}}. \quad (12)$$

Используя предыдущее решение

$$-A(x) = \frac{ba_1}{aa_1} = \frac{b \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{h^2}\right)}}{a} = \frac{b \sqrt{(h^2 - x^2)}}{ha}$$

и подставляя последнее в (10), получаем:

$$\rho \int_0^h \frac{dx}{\sqrt{(h^2 - x^2)} + \rho} = \rho \int_0^h \frac{\cos t dt}{\cos t + \rho/h}.$$

Из таблицы интегралов [9] принимаем  $\int \frac{\cos t dt}{\cos t + \rho/h} = t - \rho/h \int \frac{dt}{\cos t + \rho/h} + C$ : при  $\rho/h < 1$  последний интеграл переписываем:

В полученном выражении величины  $a$  и  $b$  полностью определяют объемы призмы и заполнителя, как и в предыдущих зависимостях.

При  $\frac{\rho}{h} > 1$  интеграл  $\int \frac{dt}{\cos t + \rho/h}$  выражается в виде:

$$\frac{E_M}{E_{\Pi}} = \frac{\pi}{2} k - \frac{2(k)^2}{\sqrt{1 - (k)^2}} \arctan \left( \sqrt{\frac{k-1}{k+1}} \right). \quad (14)$$

В последнем выражении (14) величины  $a$  и  $b$  также полностью определяют объемы призмы и заполнителя, как и в предыдущих зависимостях. Однако в выражениях (9), (10) при определении величины  $b$  по измерениям на плоскостях призм необходимо учитывать соотношение (12).

## ВЫВОДЫ

1. Суммируя полученные результаты, имеем несколько моделей для подсчета соотношений модулей:

- на основе плоских моделей [5];

- на основе объемной модели с шаровидным заполнителем и приведением распределения материала заполнителя в сечении к эллипсу (13), (14); с приведением заполнителя к прямоугольной призме (3); с приведением шаровидного заполнителя к прямоугольной призме (4); с приведением шаровидных заполнителей к эллипсоиду (10); с приведением шаровидных заполнителей к ряду эллипсоидов (11).

2. Полученные зависимости определяются двумя параметрами: соотношениями объемов заполнителя и призмы и соотношениями модулей упругости. Форма и распределение заполнителя в рассмотренных моделях определяются формой полученных выражений. Анализ полученных зависимостей показывает, что при однородном равномерном распределении заполнителя в моделях получают одинаковые соотношения (1), (3), (4), не зависящие от формы заполнителя. Зависимости, имеющие множитель  $E_M/(E_3 - E_M)$  или  $(E_3 - E_M)/E_M$ , показывают значительные отклонения от реальных значений при сближении модулей заполнителя и матрицы. Наиболее реально использовать соотношение (3) для композита с равномерно распределенным заполнителем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ахвердов И.Н. Основы физики бетона. – М.: Стройиздат, 1981.
2. Бондаренко В.М., Римшин В.И. Диссипативная теория силового сопротивления железобетона. – М.: Студент, 2015.
3. Yaser M.M. Jaradat. Soil-Structure Interaction of FRP Piles in Integral Abutment Broges. – University of Maryland, 2005.

4. Murashkin G., Panfilov D., Murashkin V. An Improved Technique of Calculating Deflections of Flexural Reinforced Concrete Elements Made of Conventional and High-Strength Concrete // Journal of Civil Engineering and Architecture. USA. – V. 7, № 2, Feb. 2013. P.125...131.

5. Варламов А.А. Модели упругого поведения бетона // Известия КГАСУ. – 2014, №3(29). С.19...26.

6. Варламов А.А. О проектировании диаграммы поведения бетона // Бетон и железобетон. – 2016. № 1. С.6...8.

7. Круциляк Ю.М., Варламов А.А. Выделение основных факторов поведения бетона // Актуальные проблемы строительства. – Магнитогорск: Изд-во Магнитогорск. гос. техн. ун-та им. Г.И.Носова, 2013. С. 93...102.

8. Римшин В.И., Ларионов Е.А., Василькова Н.Т. Энергетический метод оценки устойчивости сжатых железобетонных элементов // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. – 2012, № 2. С. 77...81.

9. Расчетно-теоретический справочник проектировщика. – М.: Госстройиздат, 1960.

10. Shubin I.L., Zaitsev Y.V., Rimshin V.I., Kurbatov V.L., Sultygova P.S. Fracture of high performance materials under multiaxial compression and thermal effect // Engineering Solid Mechanics. – 5(2), 2017. P.139...144.

11. Krishan A.L., Rimshin V.I., Telichenko V.I., Rakhmanov V.A., Narkevich M.Yu. Practical implementation of the calculation of the bearing capacity trumpet-concrete column // Izvestiya Vuzov. Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – №2, 2017. P.227...232.

12. Telichenko V.I., Rimshin V.I., Karelskii A.V., Labudin B.V., Kurbatov V.L. Strengthening technology of timber trusses by patch plates with toothed-plate connectors // Journal of Industrial Pollution Control. – 33(1). P. 103...104.

13. Cherkas A., Rimshin V. Application of composite reinforcement for modernization of buildings and structures // MATEC Web of Conferences.

14. Kuzina E., Rimshin V. Deformation Monitoring of Road Transport Structures and Facilities Using Engineering and Geodetic Techniques // Advances in Intelligent Systems and Computing.

## REFERENCES

1. Ahverdov I.N. Osnovy fiziki betona. – M.: Strojjizdat, 1981.
2. Bondarenko V.M., Rimshin V.I. Dissipativnaya teoriya silovogo soprotivleniya zhelezobetona. – M.: Student, 2015.
3. Yaser M.M. Jaradat. Soil-Structure Interaction of FRP Piles in Integral Abutment Broges. – University of Maryland, 2005.
4. Murashkin G., Panfilov D., Murashkin V. An Improved Technique of Calculating Deflections of Flexural Reinforced Concrete Elements Made of Conventional and High-Strength Concrete // Journal of Civil Engineering and Architecture. USA. – V. 7, № 2, Feb. 2013. P.125...131.

5. Varlamov A.A. Modeli uprugogo povedeniya betona // Izvestiya KGASU. – 2014, №3(29). S.19...26.
6. Varlamov A.A. O proektirovanii diagrammy povedeniya betona // Beton i zhelezobeton. – 2016. №1. S. 6...8.
7. Krucilyak Yu.M., Varlamov A.A. Vydelenie osnovnykh faktorov povedeniya betona // Aktualnye problemy stroitelstva. – Magnitogorsk: Izd-vo Magnitogorsk.gos. tehn. un-ta im. G.I.Nosova, 2013. S.93...102.
8. Rimshin V.I., Larionov E.A., Vasilkova N.T. Energeticheskij metod ocenki ustojchivosti szhatyh zhelezobetonnykh elementov // Stroitel'naya mehanika inzhernykh konstrukcij i sooruzhenij. – 2012, № 2. S.77...81.
9. Raschetno-teoreticheskij spravochnik proektirovshika. – M.: Gosstrojizdat, 1960.
10. Shubin I.L., Zaitsev Y.V., Rimshin V.I., Kurbatov V.L., Sulygova P.S. Fracture of high performance materials under multiaxial compression and thermal effect // Engineering Solid Mechanics. – 5(2), 2017. P.139...144.
11. Krishan A.L., Rimshin V.I., Telichenko V.I., Rakhmanov V.A., Narkevich M.Yu. Practical implementation of the calculation of the bearing capacity trumpet-concrete column // Izvestiya Vuzov. Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – №2, 2017. P.227...232.
12. Telichenko V.I., Rimshin V.I., Karelskii A.V., Labudin B.V., Kurbatov V.L. Strengthening technology of timber trusses by patch plates with toothed-plate connectors // Journal of Industrial Pollution Control. – 33(1). P. 103...104.
13. Cherkas A., Rimshin V. Application of composite reinforcement for modernization of buildings and structures // MATEC Web of Conferences.
14. Kuzina E., Rimshin V. Deformation Monitoring of Road Transport Structures and Facilities Using Engineering and Geodetic Techniques // Advances in Intelligent Systems and Computing.

Рекомендована Ученым советом НИИСФ  
РААСН. Поступила 22.06.18.

---