УДК 536.24

ОСОБЕННОСТИ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ КОНВЕКЦИИ В ОБЪЕМНЫХ ПОМЕЩЕНИЯХ

PECULIARITIES OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL MODELING OF CONVECTION PROCESSES IN VOLUME PREMISES

А.Г. КОЧЕВ, М.М. СОКОЛОВ, Н.В. ПАВЛЕНКО
A.G. KOCHEV, M.M. SOKOLOV, N.V. PAVLENKO

(Нижегородский государственный архитектурно-строительный университет, Научно-исследовательский институт строительной физики Российской академии архитектуры и строительных наук)
(The Nizhny Novgorod State University of Architecture and Civil Engineering, Research Institute of Building Physics of Russian Academy of Architecture and Construction Sciences)
E-mail: unirs@nngasu.ru

Рассматриваются особенности составления физико-математических моделей конвективных процессов, которые происходят в объемных помещениях. Приводятся основные исходные дифференциальные уравнения и граничные условия, а также анализ полученных решений. Рассматривается метод автомодельной переменной. Описываются особенности составления уравнений для турбулентных течений. Приводятся соответствующие выводы и рекомендации.

The features of drawing up of physical and mathematical models of convective processes which occur in volumetric primes are considered. The basic initial differential equations and boundary conditions are given, as well as analysis of the solutions obtained. The method of a self-similar variable is considered. Singularities of the formulation of equations for turbulent flows are described. Corresponding conclusions and recommendations are given.

Ключевые слова: естественная конвекция, автомодельная переменная, физико-математическая модель, объемные помещения, пограничный слой.

Keywords: natural convection, self-similar variable, physical and mathematical model, volumetric primes, boundary layer.

При составлении расчетных методик, позволяющих подобрать инженерные системы, которые смогут создать и поддерживать требуемые параметры микроклимата в объемных помещениях, необходимо, наряду с лабораторными и натурными экспериментами, обращаться к физико-математическому моделированию. Одной из самых распространенных и в то же время сложных задач является составление физико-математических моделей процессов конвекции для зданий различного назначения.

Стоит отметить, что различают естественную и вынужденную конвекцию, которые отличаются самой природой течения. Если при вынужденной конвекции наложенное внешнее течение в общем случае известно, то при естественной конвекции течение возникает в результате взаимодействия разности плотностей с гравитационным или каким-либо другим полем массовых сил, и поэтому оно постоянно связано с полями температуры и концентрации и зависит от них.

При естественной конвекции возникающее течение заранее неизвестно и определить его нужно, исходя из совместного рассмотрения процессов тепло- и массообмена и механизмов течения жидкости.

Любое нагретое тело, обтекаемое внешним потоком, будет вызывать и естественную конвекцию, обусловленную разностью температур между телом и окружающей жидкостью. Во многих практически интересных случаях оба процесса имеют существенное значение, и передача тепла происходит в результате "смешанной конвекции", в которой ни тот, ни другой вид теплообмена не является преобладающим. Главное различие между двумя процессами определяется словом "внешний" [1]. Нагретое тело в покоящемся воздухе отдает энергию в результате естественной конвекции. Но оно создает также над собой течение, обусловленное выталкивающей силой, и поэтому другое тело, помещенное в этот поток, находится во внешнем потоке; в результате становится необходимым определить влияние как естественной, так и вынужденной конвекции и определить режим, к которому относится механизм теплообмена.

Описанные различия между естественной и вынужденной конвекцией усложняют как теоретический анализ, так и экспериментальные исследования процессов, в которых участвует естественная конвекция в отличие от случая вынужденной конвекции. Поэтому для получения информации о параметрах тепло- и массообмена при изучении процесса приходится разрабатывать специальные методы.

В результате составления физико-математической модели процессов естественной конвекции для объемных зданий получается многомерная нелинейная система уравнений тепловоздушного баланса. Решение такой системы возможно только, если известны многочисленные эмпирические коэффициенты, а также для нахождения промежуточных и окончательных расчетов используются программные модули, которые позволяют получать результаты, имеющие достаточно хорошую сходимость с натуральными данными.

Процесс конвекции происходит по основным законам сохранения массы, количества движения и энергии [2]. Основные уравнения получаются из этих законов путем применения их к некоторому контрольному объему, представляющему собой область, выделенную в пространстве, через границы которой может переноситься масса, количество движения и энергия и внутри которой может происходить изменение этих физических величин.

В случае равенства нулю объемной вязкости основные определяющие уравнения для нахождения полей скорости и температуры в процессе теплообмена в условиях естественной конвекции имеют вид:

$$\frac{D\rho}{D\tau} + \rho\nabla V = 0, \qquad (1)$$

$$\rho\frac{DV}{D\tau} = F - \nabla p + \mu\nabla^2 V, \qquad (2)$$

$$\rho c_p \frac{Dt}{D\tau} = \nabla(\lambda\nabla t) + Q' + \beta T\frac{Dp}{D\tau}, \qquad (3)$$

где (1) – уравнение сплошности потока, состоящее из суммарного расхода втекающей жидкости и прироста массы жидкости, содержащейся в контрольном объеме; (2) – уравнение количества движения, или уравнение движения, в случае течения с постоянной плотностью; (3) – наиболее часто применяемая форма записи уравнения энергии, выведенного при рассмотрении бесконечно малого контрольного объема.

Основные уравнения естественной конвекции образуют систему эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных, что делает их достаточно сложными. Основные трудности решения этих уравнений связаны с необходимостью учета изменений плотности ρ в зависимости от температуры или концентрации и с эллиптичностью системы уравнений в частных производных.

В случае плоской изотермической вертикальной поверхности при температуре t_s, находящейся в изотермической окружающей среде достаточной протяженности с температурой t_a, движущая выталкивающая сила, вызывающая вертикальное течение, возникает из-за разности между объемной силой и силой, обусловленной градиентом гидростатического давления в окружающей среде. Если эта сила действует в точке с координатой x, то, приравнивая вносимую вследствие этого энергию кинетической энергии на единицу объема, получаем:

$$\frac{\rho V_x^2}{2} \approx gx(\rho_a - \rho). \qquad (4)$$

Используя это приближение (приближения Буссинеска), а также теорию пограничного слоя Людвига Прандтля [3...5], удалось придти к базовым уравнениям постановки задачи о смешанной конвекции (задана скорость набегающего потока и температура в сечении: $x = 0$, $v_x = v_0$, $T = T_0$), где свободная конвекция может действовать как в направлении набегающего потока, так и в противоположном направлении.

На первом этапе исследования взаимодействия нисходящей и восходящей струй у вертикальной поверхности целесообразно проведение приближенных оценок, основанных на точных решениях уравнений пограничного слоя.

Анализ решений для базовых моделей позволяет:

1) оптимальным образом сформулировать граничные условия на стенке;

2) по известным из решений распределениям скорости и температуры по толщине пограничного слоя подобрать их аппроксимирующие выражения, что позволит использовать для решения постоянной задачи приближенный метод интегральных уравнений пограничного слоя;

3) при получении точных решений для базовых моделей использовать метод автомодельной переменной, когда уравнения пограничного слоя – система уравнений в частных производных, сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Эти обстоятельства значительно облегчают использование простых методов при решении различных задач. Одним из таких методов является метод автомодельной переменной. Так, в случае рассмотренных дифференциальных уравнений обе компоненты скорости v_x, v_y и температура T зависят от x и y. При определенных условиях зависимость от x и y можно объединить и представить с помощью одной переменной – η. Тогда представленные выражения сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно автомодельной переменной η.

Применимость этого метода ограничивается несколькими частными случаями, некоторые из которых представляют значительный практический интерес. Например, задача о естественной конвекции около вертикальной поверхности с постоянной температурой или постоянным тепловым потоком, или с изменяющейся температурой, определяемой степенным или экспоненциальным распределением. С помощью подобных автомодельных решений можно изучить физическую природу процессов и на основе этих результатов провести дальнейшие аналитические и экспериментальные исследования.

После математических преобразований уравнения, записанные через автомодельную переменную, стали иметь вид:

$$f''' + \Theta + 3ff'' - 2f'^2 = 0, \quad \Theta''/Pr + 3f\Theta' = 0, \quad (5)$$

где штрихами обозначены производные по η.

Эта система обыкновенных дифференциальных уравнений для изотермической вертикальной поверхности.

В результате применения данного метода для неизотермической поверхности было выявлено, что скорость достигает максимального значения $V_{max} = (4 / 27)\ V_x$ на расстоянии $y = \delta / 3$ от стенки. Зная распределение V_x и v, можно с помощью метода интегральных уравнений пограничного слоя получить приближенное решение задачи в аналитическом виде.

Для нисходящего потока в воздухе ($Pr = \nu/a = 0{,}709$) толщина пограничного слоя δ и средняя скорость потока при $V_{ср} = 4V_x/27$ равны:

$$\delta/x = 5{,}38(Gr_x)^{-1/4}, \quad V_{ср} = 0{,}555(Gr_x)^{-1/2}\,\nu x^{-1}. \quad (6)$$

Также была проведена оценка по максимуму условий взаимодействия потоков со следующими параметрами воздуха (считаем $t \approx 5°C$): $\nu = 1{,}32\cdot10^{-4}$ м^2/с, $c_p = 10^3$ Дж/(кг·°С), $\beta = 3{,}665\cdot10^{-3}(\sim 1 / T)$, $\rho = 1{,}27$ кг/м^3, мощность линейного источника Q = 500 Вт/м.

Для оценки максимального значения средней скорости восходящего потока от линейного источника, закрепленного на теплоизолированной поверхности, использовано соотношение, определяющее массовый расход в пограничном слое:

$$(dm/dt) = \int_0^\infty \rho v_x dy = \int_0^\infty \nu\rho d(x) f(\eta) = ((64g\beta\rho^2\mu^2 Q)/(C_p I))^{1/5}(x)^{-3/5} J. \qquad (7)$$

На расстоянии x=2 м было получено значение $V_{ср} \approx 3\cdot10^{-2}$ м/с, для толщины пограничного слоя $\delta = 2{,}64\cdot10^{-2}$ м.

В случае нисходящего потока у охлажденной стенки для критических значений $Gr_x = 10^9$ и $x_{кр} = 0{,}8$ м (соответствует перепаду температур $\Delta T = 10°C$) значения: $V_{ср} = 0{,}287$ м/с, для толщины пограничного слоя $\delta = 2{,}9\cdot10^{-2}$ м.

Из сопоставления значений δ следует, что толщины пограничного слоя практически одинаковы. Сопоставление по скоростям $v_{ср}$ показывает, что средняя скорость восходящего потока на порядок меньше скорости потока нисходящего. Таким образом, при данных условиях восходящий поток от линейного источника не обеспечивает локализацию холодного нисходящего потока. Дальнейшее повышение мощности источника не обеспечит решение поставленной задачи, так как для рассмотренной модели средняя скорость пропорциональна $Q^{1/5}$ [6].

При составлении уравнений для турбулентных течений стоит учесть тот факт, что они характеризуются в общем случае сильной нелинейностью, а численные свойства нелинейных дифференциальных уравнений еще недостаточно изучены [7], [8]. Для турбулентных течений справедливы те же уравнения сплошности, движения и энергии, которые описывают ламинарные течения. Единственное различие между соответствующими двумя системами уравнений заключается лишь в том, что при турбулентных течениях зависимые переменные (например, Vx, Vy, p и t) интерпретируются как мгновенные величины (при осреднении по времени), каждая из которых в соответствии с аппроксимирующим выражением представляется суммой осредненного значения и пульсации, причем предполагается, что осреднения как по времени, так и по ансамблю эквивалентны (эргодическая гипотеза). Тогда подстановка аппроксимирующих соотношений в уравнения сплошности, движения и энергии, описывающие ламинарное двумерное течение несжимаемой жидкости в режиме естественной конвекции, с учетом дифференцирования по времени дает такие уравнения, которые могут быть решены численно методом конечных разностей. Для этой цели область течения, занимаемая жидкостью, разбивалась разностной сеткой с шагом (i,j), где i,j – индексы узлов сетки [6].

В результате применения данного метода получившаяся система из четырех уравнений может быть записана в матричном виде $A\cdot X = B$, где A – матрица коэффициентов; X – матрица неизвестных величин; B – матрица свободных членов.

В результате расчета математической модели получен базовый материал для описания процессов свободной конвекции около вертикальной стенки с переменными граничными условиями (рис 1 – пример получившихся результатов: профиль скорости $V_x(x,y)$ около охлажденной изотермической пластины).

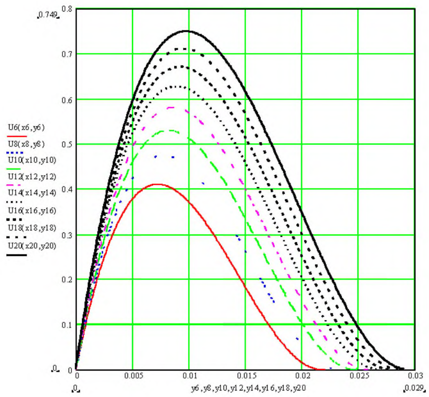

Рис. 1

ВЫВОДЫ

1. Свободно-конвективное течение возникает из-за изменения плотности среды, а если этим изменением пренебречь, то течения не будет. Поле температуры связано с течением, и все характеристические уравнения связаны друг с другом через изменение плотности, поэтому для получения распределений скорости, температуры и давления в пространстве и во времени, то есть полей

указанных параметров, нужно решать характеристические уравнения совместно.

2. Изучение последовательных стадий развития полей скорости и температуры в пристеночной конвективной струе не может быть произведено с помощью автомодельных уравнений для ламинарного пограничного слоя. Поэтому решения сформулированных задач получается с помощью численных конечно-разностных методов.

3. В обычном анализе свободной конвекции общие уравнения сводятся к так называемым уравнениям пограничного слоя путем оценки порядка величины членов исходных уравнений. Однако для рассматриваемой задачи свободно-конвективного следа такие упрощения неприемлемы из-за больших значений величин кромки пластины. В этом случае необходимо решать полные уравнения, требующие задания граничных условий на всей замкнутой границе рассматриваемой области.

4. Во многих практических задачах [6...8] основной интерес представляют полный расход воздуха, поток количества движения и перенос энергии. Для этих целей интегральный метод является удобным, хотя и приближенным средством определения искомых параметров переноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Исаченко В.П., Осипова В.А., Сукомел А.С.* Теплопередача. – Изд. 3-е, перераб. и доп. – М.: Энергия, 1975.

2. *Болгарский А.В., Мухачев Г.А., Щукин В.К.* Термодинамика и теплопередача. – Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1975.

3. *Лыков А.В.* Тепломассообмен. – М.: Энергия, 1972.

4. *Гухман А.А.* Применение теории подобия к исследованию процессов тепломассообмена. Процессы переноса в движущейся среде. – М.: Высшая школа, 1974.

5. *Кочев А.Г., Соколов М.М., Кочева Е.А., Москаева А.С.* Тепломассообмен в зданиях и инженерном оборудовании. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2017.

6. *Кочев А.Г.* Микроклимат православных храмов. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2004.

7. *Кочев А.Г., Соколов М.М.* Влияние внешней аэродинамики на микроклимат православных храмов. – Н. Новгород: ННГАСУ, 2017.

8. *Кочев А.Г., Соколов М.М.* Физико-математическое описание естественной конвекции в помещениях православных храмов // Приволжский научный журнал. – 2012, №2 (22). С 78...85.

REFERENCES

1. Isachenko V.P., Osipova V.A., Sukomel A.S. Teploperedacha. – Izd. 3-e, pererab. i dop. – M.: Energiya, 1975.

2. Bolgarskij A.V., Muhachev G.A., Shukin V.K. Termodinamika i teploperedacha. – Izd. 2-e, pererab. i dop. — M.: Vysshaya shkola, 1975.

3. Lykov A.V. Teplomassoobmen. – M.: Energiya, 1972.

4. Guhman A.A. Primenenie teorii podobiya k issledovaniyu processov teplomassoobmena. Processy perenosa v dvizhushejsya srede. – M.: Vysshaya shkola, 1974.

5. Kochev A.G., Sokolov M.M., Kocheva E.A., Moskaeva A.S. Teplomassoobmen v zdaniyah i inzhenernom oborudovanii. – N. Novgorod: NNGASU, 2017.

6. Kochev A.G. Mikroklimat pravoslavnyh hramov. – N. Novgorod: NNGASU, 2004.

7. Kochev A.G., Sokolov M.M. Vliyanie vneshnej aerodinamiki na mikroklimat pravoslavnyh hramov. – N. Novgorod: NNGASU, 2017.

8. Kochev A.G., Sokolov M.M. Fiziko-matematicheskoe opisanie estestvennoj konvekcii v pomesheniyah pravoslavnyh hramov // Privolzhskij nauchnyj zhurnal. – 2012, №2 (22). S 78...85.

Рекомендована Ученым советом НИИСФ РААСН. Поступила 18.06.18.