

УДК 677.017.335

**УТОЧНЕНИЕ ПРОЧНОСТНЫХ РАСЧЕТОВ  
АППАРАТНОЙ ШЕРСТЯНОЙ ПРЯЖИ  
В АНАЛИТИЧЕСКИХ МЕТОДАХ ПРОЕКТИРОВАНИЯ**

**SPECIFICATION CALCULATIONS OF STRENGTH  
OF A HARDWARE WOOL YARN  
IN ANALYTICAL METHODS OF DESIGNING**

*Н. С. СКУЛАНОВА, Т. В. ПОДОЛЬНАЯ, Т. И. ПОЛЯКОВА*  
*N.S. SKULANOVA, T.V. PODOLNAYA, T.I. POLYAKOVA*

**(Российский государственный университет им. А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство))**

**(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art))**

E-mail: pryadenieskulanova@mail.ru; tata.podolnaya@mail.ru

*Проведено исследование напряжений и деформаций волокон и пряжи, учитывающее изменение диаметра пряжи при ее деформировании, действие сжимающих сил, возникающих вследствие пространственного расположения волокон в пряже. Показано, что учет сжимающего напряжения увеличивает деформацию волокон и прочность пряжи уменьшается.*

*This research of tension and deformations of fibres and yarn which takes into account change of diameter of a yarn during deformation, action of the compressing forces arising because of a spatial arrangement of fibres in a yarn. It is shown, that compressing increases deformation of a fibres and reduces strength of yarn.*

**Ключевые слова:** нить, пряжа, кручение, винтовая линия, прочность, напряжение, деформация, растяжение, сжатие, модуль упругости, коэффициент Пуассона.

**Keywords:** string, yarn, torsion, helix, strength, stress, deformation, tension, compression, the modulus of elasticity, poisson's ratio.

Проектированию и прочностным расчетам нитей и пряжи посвящены многие книги, включая учебники и монографии, а также огромное число статей в отечественных и зарубежных журналах. Здесь нет необходимости приводить многочисленные регрессионные уравнения, в том числе формулы А.Н. Соловьева, В.А. Усенко и других, которые базируются на эмпирических связях, определяющих прочность пряжи по известным характеристикам волокон. Наиболее полными и глубокими по описанию деформирования, жесткости и прочности нити и пряжи можно считать труды известного английского специалиста в области структурной механики текстильных материалов J.W.S. Hearle [1]. Многие корректные ответы на вопросы, связанные с расчетом нитей, даны в статьях и книгах, где изложены аналитические методы, являющиеся универсальными и распространяющимися на любые волокна [2], [3]. Но так же, как в теоретической механике, механике деформируемого твердого тела, наряду с общими теориями и уравнениями, существуют многочисленные конкретные теории, так и в структурной механике волокнистых материалов удобно пользоваться специфическими решениями применительно к тем или иным текстильным материалам.

Аппаратной шерстяной пряже, вследствие своего назначения и использования, свойственны особенности, отличные от остальных видов пряжи: большая линейная плотность, небольшая объемная плотность, высокая неровнота, многокомпонентность. Одним из основных параметров при проектировании любого волокнистого материала

является линейная плотность нити, образующей этот материал. Геометрические, механические, физические и другие свойства нитей и полотен во многом определяются линейной плотностью. Изготовление пряжи в любой системе прядения определяется планом прядения, в котором вычисляются параметры полуфабрикатов, в том числе и линейная плотность. И если на последнем переходе указывается величина вытяжки  $E$  на прядильной машине, то при отношении  $T_{\text{ровницы}}/E$  получаем линейную плотность не пряжи, а волокнистой ленточки, выходящей из вытяжного прибора. Уже при кручении и последующем наматывании линейная плотность увеличивается. Длина крученого продукта меньше нескрученного, и в прядении приняты различные показатели скрученности нити, характеризующие изменение длины при кручении: укрутка нити  $u$ , коэффициент укрутки  $k_u$ , усадка при скручивании  $y$ . Для нитей малой линейной плотности перечисленные характеристики близки к единице, и ими обычно пренебрегают. Иначе обстоит дело с аппаратной пряжей, к тому же еще и рыхлой. Следует ожидать значительное изменение длины при кручении и увеличение линейной плотности пряжи по сравнению с соответствующими показателями нескрученного продукта. Вычислим эти изменения.

При кручении нити, ровницы, пряжи геометрическую модель крученого продукта можно представить в форме полых прямых круговых цилиндров радиуса  $g$ , в которых волокна расположены по винтовым линиям с постоянным шагом  $h$  (рис. 1) [1...3].

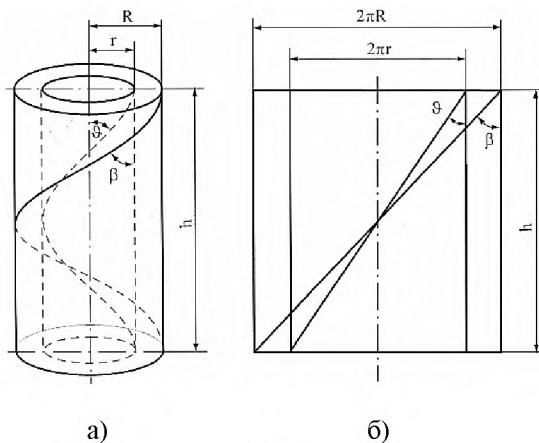


Рис. 1

Шаг винтовой линии не зависит от текущего радиуса нити и определяется круткой нити  $K = \ell/h$ . Угол подъема винтовой линии, то есть угол между касательной к винтовой линии и образующей цилиндра, равен  $\vartheta$ . В одиночной нити радиуса  $R$  угол подъема внешнего волокна равен углу кручения  $\beta$ . Из рис. 1 следует  $\operatorname{tg}\vartheta = 2\pi r/h$ , или  $\operatorname{tg}\vartheta = 2\pi K$ . Длина волокна записывается с помощью формулы:

$$s = \sqrt{h^2 + (2\pi r)^2} = \sqrt{1 + (2\pi K)^2} h. \quad (1)$$

Осевая составляющая длины волокна, расположенного на расстоянии  $r$  от центра, отнесенная к длине  $s_r$  самого волокна, определяется из выражения (1):

$$\frac{h}{s_r} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi K)^2}}.$$

В сопротивлении материалов относительный угол закручивания  $\theta$  представляет собой угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними (угол  $\theta$  соответствует относительному удлинению  $\Delta\ell/\ell$  при растяжении). Угол  $\Delta$  связан с круткой выражением  $\theta=2\pi K$ . Обозначим  $\frac{h}{s_r} = \lambda_r$ , тогда предыдущее соотношение запишем в виде:

$$\lambda_r = \frac{1}{\sqrt{1 + r^2\theta^2}}. \quad (2)$$

В современной литературе по механике композитов, механике волокнистых материалов широко используется метод усреднения, позволяющий учесть влияние каждого волокна на то или иное свойство целого. Для этого разделим нить на цилиндрические элементы радиальной толщины  $dr$  и площадью  $2\pi r dr$ . Если  $m$  – число волокон, приходящихся на единицу площади сечения нити, то усреднение получаем из выражения:

$$\lambda = \frac{1}{\pi m R^2} \int_0^R \frac{2\pi m r}{\sqrt{1 + r^2\theta^2}} dr = \frac{2}{R^2\theta^2} (\sqrt{1 + r^2\theta^2} - 1). \quad (3)$$

Напомним, что  $\lambda$  представляет собой усредненное отношение  $h/s_r$ , которое в случае некрученной нити должно быть равно единице.

Приведем расчет изменения длины проектируемой шерстяной аппаратной пряжи линейной плотности 110 текс с круткой 350 кручений на метр. При плотности пряжи 0,5 г/см<sup>3</sup> диаметр пряжи  $d=0,53$  мм, относительный угол закручивания  $\theta = 2\pi K = 2,199$  рад. Длина одиночной пряжи, отнесенная к длине некрученного продукта:

$$\lambda = \frac{2}{R^2\theta^2} (\sqrt{1 + r^2\theta^2} - 1) = 0,927.$$

Таким образом, для формирования одиночной пряжи 110 текс должна быть волокнистая ленточка 102 текс. На прядильных машинах вытяжка  $E$  должна быть установлена не как отношение линейных плотностей питающего полуфабриката (ровницы или ленты) и пряжи, а корректироваться на толщину некрученого волокнистого материала, выходящего из вытяжного прибора, то есть волокнистой ленточки.

Следующий этап проектирования – расчет прочности пряжи при заданной геометрии и свойствах волокон. Теория, уравнения и формулы подробно изложены в [2], [3]. Наибольшее напряжение сосредоточено в группе волокон, расположенных по прямым линиям вдоль оси нити, где деформация волокна равна деформации нити. В этих усло-

виях механизм разрушения нити представляет собой последовательный разрыв волокон, сначала наиболее слабых, а затем, после обрыва одного волокна, перераспределение нагрузки на остальные  $(m-1)$  волокон. Напряжение в волокнах увеличивается, и далее разрушение будет происходить по схеме пучка [2...4]. Распределение усилий между разорванным волокном и соседним, еще не разорванным, осуществляется в результате взаимодействия волокон, и на некотором расстоянии  $\ell_s$  от места обрыва наличие обрыва практически не будет сказываться на распределении усилий. Величина усилия в оборванном волокне будет почти та же, что и в соседних необорванных волокнах. В механике волокнистых материалов длина  $\ell_s$  называется длиной скольжения [1...3]. Длина  $2\ell_s$  принимается за длину пучка, к которому применяется теория пучка, разработанная Даниэльсом [акад. Ю.Н. Работнов, 4]. Это первое существенное отличие данной работы от остальных по механике разрушения текстильных нитей. Длина скольжения в пряже вычисляется по формуле [1...3]:

$$\ell_s = \sqrt{\frac{r_f Q}{2\mu(1 - \cos^2 \beta)}}, \quad (4)$$

где  $r_f$  – радиус волокна;  $Q$  – длина волны миграции волокна, равная четырем оборотам крутки;  $\mu$  – коэффициент трения между волокнами;  $\beta$  – угол кручения.

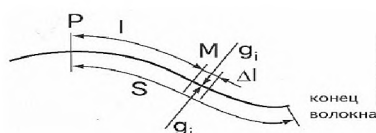


Рис. 2

Проскальзывание волокон уменьшает прочность пряжи и характеризуется коэффициентом скольжения:

$$k_s = 1 - \frac{2}{3\ell_f} \sqrt{\frac{r_f Q}{2\mu(1 - \cos^2 \beta)}}. \quad (5)$$

При расчете длины и коэффициента скольжения на скользящее волокно (рис. 2)

действует суммарная сила трения – сила  $f_s$ , препятствующая скольжению на расстоянии  $s$  от конца волокна:

$$f_s = \int_0^s \mu g_i (2\pi\alpha) d\ell_i. \quad (6)$$

При этом есть основание предполагать, что между волокнами это происходит не по всей поверхности цилиндра длиной  $\ell$  и радиусом  $a$ . Любое волокно контактирует с окружающими соседними волокнами в точках соприкосновения. Если принять гексагональное расположение, то таких точек будет шесть. Конечно, контакт происходит по некоторой поверхности, но, скорее всего, его можно признать почти точечным из-за малых поперечных напряжений  $g_i$ . Величина площади контакта неизвестна, и пути ее экспериментального определения неясны. Во всяком случае, для приближения расчетов к реальным можно существенно уменьшить коэффициент трения  $\mu$  по сравнению с принимаемым в обычных условиях. Тогда сила трения  $f_s$ , определяемая формулой (6), искусственно занижается, как если бы мы уменьшали площадь контакта между волокнами. Это допущение является второй особенностью излагаемой здесь статьи. Теперь вычислим прочность шерсто-вискозной пряжи, следуя [1...3]. Характеристики волокон и пряжи даны в табл. 1 и 2 исходных данных волокон и пряжи. Геометрические и механические параметры волокон компонентов (табл. 1), параметры пряжи (табл. 2).

Ранее отмечалось, что теория прочности пряжи с подробными примерами изложена в [2], [3]. Поэтому приведем лишь результаты вычислений: 1) по приближенной теории, описывающей разрушение пряжи без учета взаимодействия волокон, когда удельное напряжение  $\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y)$ , представляющее собой отношение предела прочности (разрывного напряжения) пряжи к пределу прочности волокна длиной  $2\ell_x$ , равно  $\cos^2 \beta$ ; 2) по уточненной теории, в соответствии с которой:

$$\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y) = \frac{2 \cos^2 \beta}{(1+2v_f)(1-\cos^2 \beta)} \left\{ (1+v_y) \left[ \ln \cos \beta + \frac{2(1+v_f)}{1+2v_f} (1-(\cos^2 \beta)^{2v_f+1}) \right] - \frac{v_y}{2} \left[ \frac{3(1+2v_f)}{2v_f-1} - \frac{4(1+v_f)}{2v_f-1} (\cos \beta)^{2v_f-1} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right] \right\}. \quad (7)$$

3) коэффициенты Пуассона волокна и пряжи равны 0,5. Это существенно упрощает интерпретацию проводимых расчетов. При этом надо иметь в виду, что допущение  $v_{\text{пряжи}}=0,5$  вполне реально, обоснование приведено в [1...3]. Что же касается во-

локон, то это тоже вполне допустимо при наличии пустот в структуре волокон. Правда, здесь сталкиваемся с затруднениями математического характера – в (7) делитель  $(2v_f-1) = 0$ . После раскрытия неопределенности получаем:

$$\tilde{\sigma}_y(\beta, v_f = 0,5; v_y = 0,5) = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2 \beta + \frac{3 \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \ln \cos^2 \beta.$$

Таблица 1

№	Параметры волокна	1-й компонент	2-й компонент
1		вискоза	шерсть
2	L – длина, мм	65	50
3	T – линейная плотность, мтекс	440	520
4	P – разрывная нагрузка, сН	8,60	5,76
5	C <sub>рв</sub> – квадратическая неровнота по прочности, %	16	42
6	ε – разрывная деформация, %	24	33
7	μ – коэффициент трения по волокну	0,01	0,5
8	γ – плотность, г/см <sup>3</sup>	1,52	1,32
9	β – массовая доля, %	35	65
10	v <sub>v</sub> – коэффициент Пуассона	0,3	0,3

Таблица 2

№	Параметры	Значение
1	T <sub>пр</sub> – линейная плотность, текс	110
2	Ст <sub>500</sub> – неровнота по линейной плотности, %	9,3
3	γ <sub>упр</sub> – плотность пряжи, г/см	0,55
4	K – крутка пряжи, м <sup>-1</sup>	350
5	v <sub>пр</sub> – коэффициент Пуассона	0,5

Напряжение в разрывающемся вискозном волокне длиной  $2\ell_s$  и прочностью 8,641 сН более жесткого компонента  $\sigma_f(8,641 \cdot 10^{-2}, T_f, \gamma_f) = p_f, \gamma_f / T_f = 0,299$  ГПа. Напряжение в пряже становится равным  $\sigma_y = \sigma_f(8,641 \cdot 10^{-2}, T_f, \gamma_f) \tilde{\sigma}_y(\beta, v_f, v_y)$ . Перейдем от напряжений к силам; прочность разрывающегося пучка, состоящего из 60 вискозных волокон, становится равной  $P_y = \sigma_y T_{60f1} / \gamma_f$  Н. Умножим  $P_y$  на коэффициенты реализации  $k_r = 0,71$ , скольжения  $k_s = 0,901$  и множитель  $(1+e) = 1,999$ , учитывающий как разрывающиеся, так и остальные, еще не разорванные, шерстяные волокна, воспринимающие внешнюю нагрузку, и вычислим прочность пряжи:

- 1)  $P_{\cos^2 \beta} = 506,8$  сН,
- 2)  $P_{\text{точное}} = 450,6$  сН,
- 3)  $P_{v=0,5} = 439,1$  сН.

Ясно, что результаты между вариантами 1) и 2) существенно различны. Прогнозируемое уменьшение прочности с учетом взаимодействия волокон объясняется известными положениями сопротивления материалов. В условиях растягивающего  $\sigma_f$  и сжимающего  $g$  напряжений деформация волокна равна:  $\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} + \frac{2v_f}{E_f} g$ , где  $v_f$  – коэффициент Пуассона волокна. Сжимающее напряжение  $g$  увеличивает деформацию волокна  $\varepsilon_f$  и для достижения предельной деформации требуется меньшее растягивающее напряжение  $\sigma_f$ .

## ВЫВОДЫ

Таким образом, можно утверждать, что прочностные расчеты пряжи больших линейных плотностей следует проводить с учетом изменения диаметра пряжи и дейст-

вия сжимающих сил, возникающих из-за пространственного расположения волокон в нити при ее нагружении. В приведенных выкладках установлено основное влияние на величину предела прочности наряду с коэффициентом реализации прочности волокон в пряже (получен аналитически), также длины скольжения, на которую пересчитывается прочность волокна при стандартных испытаниях при  $l = 10$  мм).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers // Yarns and Fabrics.* –New York, 1969.
2. *Щербakov В.П. Прикладная и структурная механика волокнистых материалов.* – М.: "Тисо Принт", 2013.
3. *Щербakov В.П., Скуланова Н.С. Основы тео-*

рии деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.

4. *Работнов Ю.Н. Механика деформируемого твердого тела.* – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1979.

#### REFERENCES

1. *Hearle J.W.S., Grosberg R., Backer S. Structural Mechanics of Fibers // Yarns and Fabrics.* –New York, 1969.
2. *Sherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mehanika voloknistyh materialov.* – М.: "Tiso Print", 2013.
3. *Sherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstilnyh materialov.* – М.: MGTU im. A.N. Kosygina, 2008.
4. *Rabotnov Yu.N. Mehanika deformiruemogo tverdogo tela.* – М.: Nauka. Glavnaya redakciya fiziko-matematicheskoy literatury, 1979.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий. Поступила 24.04.18.