

**РАСЧЕТ НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
СЖАТОЙ В СРЕДИННОЙ ПЛОСКОСТИ  
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ,  
ИМЕЮЩЕЙ РАЗЛИЧНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ВДОЛЬ ОДНОГО КРАЯ,  
МЕТОДОМ НАЧАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ\***

**CALCULATION OF THE STABILITY  
OF THE COMPRESSED PLATES AT THE MEDIAN PLANE  
HAVING DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS ALONG ONE EDGE  
BY THE METHOD OF INITIAL FUNCTIONS**

*А.Ю. УШАКОВ, С.И. ЖАВОРОНОК*  
*A.YU. USHAKOV, S.I. ZHAVORONOK*

(Национальный исследовательский  
Московский государственный строительный университет,  
Институт прикладной механики Российской Академии наук)  
(National Research Moscow State University of Civil Engineering,  
Institute of Applied Mechanics of Russian Academy of Sciences)  
E-mail: 903714@mail.ru; Zhavoronok@iam.ras.ru

*В статье рассматривается применение аналитического метода начальных функций для расчета тонких упругих сжатых прямоугольных пластинок с комбинированными граничными условиями вдоль краев. Алгоритм расчета показан на примере прямоугольной пластинки с различными условиями закрепления продольных краев и состоящей из двух областей с одинаковыми граничными условиями. Критические силы определяются из решения системы уравнений, в которую входят канонические уравнения и уравнения, определяющиеся из условий на линии стыковки двух областей пластинки – равенства угла поворота и перерезывающей силы.*

*The application of the analytical method for computing of initial functions for compressed thin elastic rectangular plates with mixed boundary conditions along their edges is shown on the example of a rectangular plate with different conditions for fixing the longitudinal edges and consisting of two regions with the same boundary conditions. Then the critical forces are obtained from the equation system that includes both canonical equations and equations determined from the conditions on the joining line of two subdomains, the equalities of the angle of rotation and the shear force.*

**Ключевые слова:** метод начальных функций, канонические уравнения, соотношение обобщенной ортогональности, граничные условия, прямоугольная пластинка, шарнир, жесткая заделка, опора.

**Keywords:** initial function method, canonical equations, generalized orthogonality conditions, boundary conditions, rectangular plates, hinged edge, clamped edge, support.

На практике часто возникает необходимость выполнить расчет тонких неоднородных пластинчатых конструкций, в том числе

и с неоднородностью условий на контуре, включая смену типа граничного условия. Задачи такого класса, как правило, решаются

\* Работа выполнена в рамках Государственного задания по фундаментальным научным исследованиям ГП 14 (0050-2017-0001), номер гос. регистрации АААА-А17-117032010136-3.

численно – методами конечных разностей, конечных элементов [3], методом Бубнова-Галеркина [4], [5], бессеточными методами [6]. Приближенные аналитические и полуаналитические методы требуются для обеспечения проекторочных расчетов и качественного анализа поведения конструкции с усложненными свойствами, например, для пластинок из современных функционально-градиентных композиционных материалов [7]. Вычисление критических сил одним из численных методов нередко предваряется аналитическим определением докритического состояния, например, в сочетании метода дифференциальных квадратур [8], [9] с методом Ритца [8] или с введением функций напряжений [10] при комбинированных краевых условиях. Методы аналитического решения задачи о потере устойчивости тривиального равновесного состояния пластинки при сложных краевых условиях, судя по цитируемой литературе, развиты недостаточно.

В работе на примере пластинки, приведенной на рис. 1, рассматривается методика расчета сжатой прямоугольной пластинки с

комбинированными граничными условиями вдоль краев аналитическим методом начальных функций. Пластика состоит из двух частей (областей) размером  $l_1 \times 2h$  и  $l_2 \times 2h$  и загружена равномерной сжимающей силой  $N_1$ . В каждой области граничные условия вдоль краев не изменяются (шарнир  $\text{-----}$  или заделка  $\text{////////}$ ).

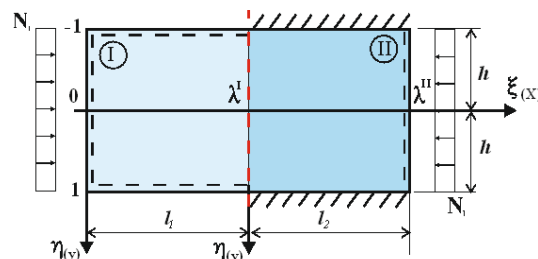


Рис. 1

Каждую область отнесем к своей системе безразмерных координат  $\xi = \frac{x}{h}$ ;  $\eta = \frac{y}{h}$ : для области I:  $-1 \leq \eta \leq +1$ ;  $0 \leq \xi \leq \lambda^I = \frac{l_1}{h}$ , для области II:  $-1 \leq \eta \leq +1$ ;  $0 \leq \xi \leq \lambda^{II} = \frac{l_2}{h}$ .

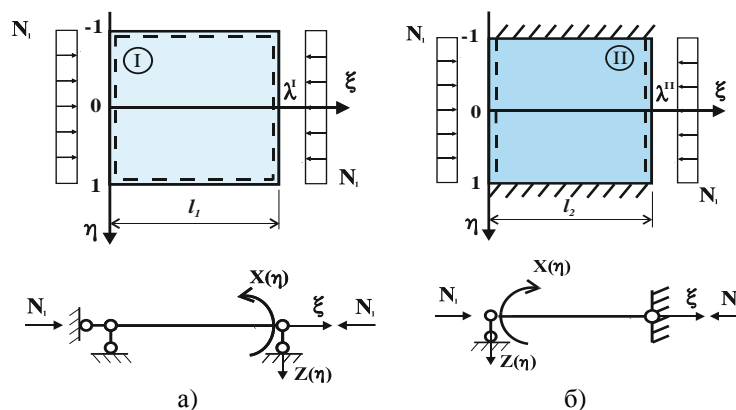


Рис. 2

Решаем задачу смешанным методом: врезаем шарнирно неподвижную опору на линии контакта областей и прилагаем безразмерный неизвестный изгибающий момент  $M_x = \frac{D}{h} X(\eta)$  и неизвестный безразмерный прогиб  $W = \frac{1}{h} Z(\eta)$  (рис. 2).

Учитывая симметрию задачи относительно оси  $\xi$  представляем неизвестные  $Z(\eta)$  и  $X(\eta)$  в виде тригонометрических рядов с неизвестными коэффициентами  $C_m$  и  $D_m$ :

$$Z(\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} C_m \cos \frac{m\pi}{2} \eta,$$

$$X(\eta) = \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m \cos \frac{m\pi}{2} \eta.$$

Используя методику [2], получаем общее решение задачи для каждой области. Для первой области (рис. 2-а):

$$W^I = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^I \operatorname{sh} r_n \xi + B_n^I \operatorname{ch} r_n \xi) F^I(r_n, \eta), \quad (1)$$

где  $F_{(r_n, \eta)}^I = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (\cos a_n \cos b_n \eta - \cos b_n \cos a_n \eta)$  – функция однородного решения, зависящая от типа граничных условий на краях, параллельных начальной линии, в которой  $a_n$  и  $b_n$  определяются по формулам:

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{r_n^2 + \Delta_n}; \\ b_n &= \sqrt{r_n^2 - \Delta_n}; \\ \Delta &= i r_n \sqrt{2N_1}. \end{aligned}$$

Соответствующее характеристическое уравнение для определения  $N_1$ :

$$\frac{1}{a_n^2 - b_n^2} \cos a_n \cos b_n = 0. \quad (2)$$

Для второй области (рис. 2-б):

$$W^{II} = 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^{II} \operatorname{sh} r_n \xi + B_n^{II} \operatorname{ch} r_n \xi) F_{(r_n, \eta)}^I, \quad (3)$$

где  $F_{(r_n, \eta)}^{II} = \frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (b_n \sin b_n \cos a_n \eta - a_n \sin a_n \cos b_n \eta)$ ,

а  $a_n$  и  $b_n$  вычисляются по формулам как для первой области, но  $N_1$  находятся из решения уравнения, отличного от характеристического уравнения первой области, а именно:

$$\frac{1}{a_n^2 - b_n^2} (b_n \sin b_n \cos a_n \eta - a_n \sin a_n \cos b_n \eta) = 0. \quad (4)$$

Коэффициенты  $A_n^I, B_n^I, A_n^{II}, B_n^{II}$ , входящие в решения  $W^I$  и  $W^{II}$ , могут быть определены точно на основании соотношения обобщенной ортогональности собственных функций  $F_n(r_n, \eta)$  однородного решения задачи [1]:

$$\int_0^1 (F_n'' F_k'' - r_n^2 r_k^2 F_n F_k) d\eta = \begin{cases} 0 & (n \neq k) \\ J_n(n = k) \end{cases} \quad (5)$$

из граничных условий на поперечных сторонах каждой области при заданных значениях прогиба  $W$  и изгибающего момента  $M_x$  или угла поворота  $\varphi_x$  и перерезывающей силы  $Q_x$ .

Соотношение (5) позволяет разложить две функции  $f_1(\eta)$  и  $f_2(\eta)$  (в том числе и нуль) в ряды по функциям  $F_{(r_n, \eta)}$ :

$$\begin{aligned} f_1 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} A_n F_{(r_n, \eta)}, \\ f_2 &= 2 \operatorname{Re} \sum_{n=1}^{\infty} A_n r_n^2 F_{(r_n, \eta)} \end{aligned}$$

с одним и тем же коэффициентом  $A_n$ , отличным от нуля, определяемым по формуле:

$$A_n = \frac{1}{J_n} \left\{ \int_0^1 f_1'' F_{(r_n, \eta)}'' d\eta - r_n^2 \int_0^1 f_2 F_{(r_n, \eta)} d\eta \right\}, \quad (6)$$

где  $J_n = \int_0^1 (F_{(r_n, \eta)}''^2 - r_n^4 F_{(r_n, \eta)}^2) d\eta$ .

В канонические уравнения (2) и (4) входят неизвестное значение критической силы  $N_1$  и бесконечное множество комплексных корней  $r_n$ . Поэтому для нахождения величины критической силы, для которой существует изогнутая форма равновесия пластинки, необходимо получить дополнительное уравнение.

Дополнительное уравнение для нахождения критической силы  $N_1$  получим из удовлетворения граничных условий в сечении стыковки двух пластинок  $\xi^I = \lambda^I$  и  $\xi^{II} = 0$ , а именно равенства угла поворота и перерезывающей силы:

$$\varphi_x^I(\eta, \lambda^I) = \varphi_x^{II}(\eta, 0); \quad Q_x^I(\eta, \lambda^I) = Q_x^{II}(\eta, 0). \quad (7)$$

Подставив выражение (6) в систему (7) и воспользовавшись свойством ортогональности к полной системе тригонометрических функций, по которой раскладывали функции  $Z_{(n)}$  и  $X_{(n)}$ , получим систему однородных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов  $E_m$  и  $D_m$ :

$$\begin{cases} \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 G_{n,k} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m T_{n,k} = 0, \\ \sum_{m=1,3,5}^{\infty} E_m \left( \frac{m\pi}{2} \right)^2 U_{n,k} + \sum_{m=1,3,5}^{\infty} D_m E_{n,k} = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Поскольку неизвестные коэффициенты не могут быть равны нулю ( $E_m \neq 0, D_m \neq 0$ ), то в первом приближении, должен быть равен нулю определитель системы уравнений.

Таким образом, определитель системы уравнений (8) является третьим уравнением, решая которое совместно с характеристическими (2) и (4), определим  $r_n^I$ ,  $r_n^{II}$  и найдем искомый параметр критической сжимающей нагрузки  $N_1$ .

В качестве примера для определения критической сжимающей нагрузки  $N_1$  используем следующие исходные данные: коэффициент Пуассона  $\nu=0,3$ ; модуль упругости  $E=200000$  МПа; размеры сторон пластинки  $h=0,5$  м и  $l=2$  м; толщина пластинки  $\delta=0,02$  м.

Точность определения искомой критической силы зависит от порядка системы линейных уравнений (8). Вычисления показали, что для определения критической силы достаточно три-четыре члена ряда по  $n, m, k$ , чтобы получить практически точное значение.

В табл. 1 приведены значения критической силы  $N_1$  для исследуемой пластинки в зависимости от числа членов ряда по  $n, m, k$ .

Т а б л и ц а 1

Количество членов ряда по $n, m, k$	2	3	4
Величина критической силы $N_1$	4,66091·106 Н/м	5,99732·106 Н/м	6,10031·106 Н/м
Отличие в % от предыдущего	-	22%	1,8%

На рис. 3 для полученного значения критического усилия  $N_1$  приведена форма потери устойчивости.

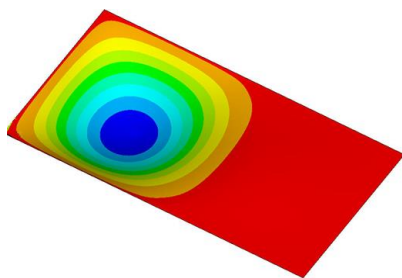


Рис. 3

Аналогично могут быть решены задачи, когда необходимо деление пластинки на большее число областей.

## В Ы В О Д Ы

Предлагаемая методика позволяет построить аналитическое решение и получить числовые результаты для задачи расчета сжатой пластинки со смешанными граничными условиями вдоль краев, а также учитывать особенности, заданные вдоль линий, изменение цилиндрической жесткости, наличие шарнирной или упругой связи отдельных частей пластинки и т.д.

## Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Ванюшенков М.Г., Ушаков А.Ю. Соотношение обобщенной ортогональности и их использование при расчете сжато-изогнутых пластинок методом начальных функций // Строительная механика и расчет сооружений. – 2006, №6. С.12...17.

2. Ушаков А.Ю., Ванюшенков М.Г. Изгиб прямоугольной пластинки при действии продольных сжимающих сил // Промышленное и гражданское строительство. – 2013, №10. С.72...73.

3. Евзеров И.Д. Задачи устойчивости для стержней и пластин // Инженерно-строительный журнал. – 2014, №1(45). С. 6...11.

4. Tamrazyan A.G. The assessment of reliability of punching reinforced concrete beamless slabs under the influence of a concentrated force at high temperatures // Procedia Engineering. – V. 153, 2016. P. 715...720.

5. Tamrazyan A., Filimonova E. Searching method of optimization of bending reinforced concrete slabs with simultaneous assessment of criterion function and the boundary conditions // Applied Mechanics and Materials. – V. 467, 2014. P. 404...409.

6. Chen X.L., Liew K.M. Buckling of rectangular functionally graded material plates subjected to nonlinearly distributed in-plane edge loads // Smart Mater. Struct. – V. 13. P. 1430...1437.

7. Kiani Y. Buckling of FG – CNT reinforced composite plates subjected to parabolic loading // Acta Mechanica. – V. 228, №4, 2017. P. 1309...1319.

8. Wang X., Wang X., Shi X. Accurate buckling loads of the rectangular plates under parabolic edge compressions by the differential quadrature method // Int. J. Mech. Sci. – V. 49, 2007. P. 437...453.

9. Poodeh F., Farhatmia F., Reesi M. Buckling analysis of orthotropic thin rectangular plates subjected to nonlinear in-plane distributed loads using general differential quadrature method // Int. J. Comput. Meth. in Engineering and Mechanics. – V. 19, №2, 2018. P.102...110.

10. Panda S.K., Ramachandra L.S. Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by non-uniform in-plane loads // Int. J. Mech. Sci. – V.52, 2010. P. 819...828.

## R E F E R E N C E S

1. Vanjushenkov M.G., Ushakov A.Ju. Sootnoшение obobshhennoj ortogonal'nosti i ih ispol'zovanie

pri raschete szhato-izognutyh plastinok metodom nachal'nyh funkcij // Stroitel'naja mehanika i raschet sooruzhenij. – 2006, №6. S.12...17.

2. Ushakov A.Ju., Vanjushenkov M.G. Izgib prjamougol'noj plastinki pri dejstvii prodol'nyh szhimajushhih sil // Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo. – 2013, №10. S.72...73.

3. Evzerov I.D. Zadachi ustojchivosti dlja sterzhnej i plastin // Inzhenerno-stroitel'nyj zhurnal. – 2014, №1(45). S. 6...11.

4. Tamrazyan A.G. The assessment of reliability of punching reinforced concrete beamless slabs under the influence of a concentrated force at high temperatures // Procedia Engineering. – V. 153, 2016. P. 715...720.

5. Tamrazyan A., Filimonova E. Searching method of optimization of bending reinforced concrete slabs with simultaneous assessment of criterion function and the boundary conditions // Applied Mechanics and Materials. – V. 467, 2014. P. 404...409.

6. Chen X.L., Liew K.M. Buckling of rectangular functionally graded material plates subjected to nonlinearly distributed in-plane edge loads // Smart Mater. Struct. – V. 13. P. 1430...1437.

7. Kiani Y. Buckling of FG – CNT reinforced composite plates subjected to parabolic loading // Acta Mechanica. – V. 228, №4, 2017. P. 1309...1319.

8. Wang X., Wang X., Shi X. Accurate buckling loads of the rectangular plates under parabolic edge compressions by the differential quadrature method // Int. J. Mech. Sci. – V. 49, 2007. P. 437...453.

9. Poodeh F., Farhatnia F., Reesi M. Buckling analysis of orthotropic thin rectangular plates subjected to nonlinear in-plane distributed loads using general differential quadrature method // Int. J. Comput. Meth. in Engineering and Mechanics. – V. 19, №2, 2018. P.102...110.

10. Panda S.K., Ramachandra L.S. Buckling of rectangular plates with various boundary conditions loaded by nonuniform in-plane loads // Int. J. Mech. Sci. – V.52, 2010. P. 819...828.

Рекомендована кафедрой железобетонных и каменных конструкций НИУ МГСУ. Поступила 15.04.18.