УДК 624.072.225

ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗГИБАЮЩИХ МОМЕНТОВ В ЖЕЛЕЗОБЕТОННОЙ БАЛКЕ НА УПРУГОМ СТОХАСТИЧЕСКИ НЕОДНОРОДНОМ ОСНОВАНИИ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СЛУЧАЙНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКИ

ESTIMATION OF DISTRIBUTION PARAMETERS OF BENDING MOMENTS IN A REINFORCED CONCRETE BEAM ON AN ELASTIC STOCHASTICALLY INHOMOGENEOUS BASE UNDER THE ACTION OF A RANDOM DISTRIBUTED LOAD

П.Д. ДЁМИНОВ
P.D. DEMINOV

(Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет)
(National Research Moscow State University of Civil Engineering)
E-mail: p-deminov@mail.ru

Представлены результаты оценки параметров распределения прогибов и изгибающих моментов в железобетонной балке, лежащей на упругом основании. Нагрузка на балку рассматривается как стационарная случайная функция, упругие свойства основания описываются моделью коэффициента постели, который рассматривается как стационарная случайная функция. Жесткость балки рассматривается как случайная величина. Для решения уравнения изгиба балки на упругом основании со случайными свойствами и загруженной случайной нагрузкой используется метод малого параметра и метод спектральных представлений. Полученные вероятностные характеристики распределения изгибающих моментов позволяют найти вероятность разрушения железобетонной балки на упругом стохастически неоднородном основании.

The results of the evaluation of the parameters of the distribution of deflections and bending moments in a reinforced concrete beam lying on an elastic foundation are presented. The load on the beam is considered as a stationary random function, the elastic properties of the base are described by the bed ratio model, which is considered as a stationary random function. Beam stiffness is treated as a random variable. To solve the beam bending equation on an elastic foundation with random properties and a random load loaded, the small parameter method and the spectral representation method are used. The obtained probabilistic characteristics of the distribution of bending moments allow us to find the probability of failure of a reinforced concrete beam on an elastic stochastically inhomogeneous base.

Ключевые слова: железобетонная балка, упругое основание, случайные характеристики, распределение прогибов, изгибающие моменты.

Keywords: reinforced concrete beam, elastic base, random characteristics, distribution of deflection, bending moments.

Вопросы обеспечения безопасности различных железобетонных конструкций зданий текстильной промышленности рассмотрены в работах [1…5].

В [6] определена вероятность разрушения железобетонной балки с жесткостью B(R)(R), лежащей на упругом стохастически неоднородном основании и загруженной случайной нагрузкой $q(x)$. Разрушение железобетонной балки происходит в случае, если $M(x) > M_{ult}(R, \sigma_т)$, где $M_{ult}(R, \sigma_т)$ – случайная величина несущей способности балки, а $M(x)$ – нормально распределенные изгибающие моменты в характерных сечениях балки, зависящие от случайных параметров $B(R), q(x), C(x)$:

$$e_p = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int p_{\sigma_т}(\sigma_т)\, p_R(R)\, p_q(q) p_C(C) \left[\int\limits_{M_{ult}(R,\sigma_т)}^{\infty} [p_M(M, R, q, C) dM]\right] d\sigma_т dR dq dC, \quad (1)$$

где $p_R(R), p_{\sigma_т}(\sigma_т),\ p_q(q),\ p_C(C)$ – функции плотности распределения случайных величин кубиковой прочности бетона R и предела текучести арматуры $\sigma_т$, случайных стационарных функций распределенной нагрузки $q(x)$ и коэффициента отпора основания (коэффициента постели) $C(x)$; $p_M(M, R, q, C)$ – функция плотности распределения изгибающих моментов в балке.

Все случайные параметры принимаются распределенными по нормальному закону.

Для того чтобы найти параметры распределения $p_M(M, R, q, C)$ изгибающих моментов, необходимо иметь математическое ожидание и дисперсию изгибающих моментов в балке на упругом стохастическом основании при загружении ее нагрузкой неоднородной в вероятностном смысле [7].

Рассмотрим балку, загруженную равномерно распределенной случайной нагрузкой. Упругие свойства основания будем полагать соответствующими модели с одним коэффициентом отпора; предположим также, что кубиковая прочность бетона R получила случайную реализацию, которой соответствует жесткость балки B_0.

Уравнение изгиба стержня, лежащего на упругом основании с одним коэффициентом постели, имеет известный вид:

$$B_0 \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + C(x) w(x) = q(x). \quad (2)$$

Если предположить отклонения случайных параметров от их средних значений статистически незначимыми, то для решения неоднородного дифференциального уравнения (2) можно использовать метод малого параметра, известный со времен Анри Пуанкаре (Henri Poincaré) и использованного для задачи, подобной рассматриваемой в данной статье, В.В.Болотиным [8].

Среднее значение случайного коэффициента постели, среднее значение внешней нагрузки, действующей на балку, и среднее значение прогибов балки обозначим соответственно $< C >, < q >, < w >$.

Раскладываем функцию прогибов балки $w(x)$, а также функции отпора основания $C(x)$ и нагрузки $q(x)$ в виде:

$$q(x) = < q > + \vartheta q_1(x), \quad (3)$$

$$C(x) = < C > + \vartheta C_1(x), \quad (4)$$

$$w(x) = < w > + \vartheta w_1(x) + \\ + \vartheta^2 w_2(x) + \cdots = \\ = \sum_{n=0}^{N} \vartheta^n w_n(x), n = 0,1,2,\dots, N \to \infty(x), \quad (5)$$

где ϑ – малый параметр, полагаемый после выполнения всех выкладок равным 1.

Подставляя выражения (3), (4) и (5) в уравнение (2) и приравнивая члены с одинаковой степенью малого параметра, переходим к системе дифференциальных уравнений:

$$B_0 (R) \frac{d^4 <w>}{dx^4} + < C >< w > = < q >, \quad (6)$$

$$B_0 (R) \frac{d^4 w_1(x)}{dx^4} + < C > w_1(x) = q_1(x) - < w > C_1(x), \quad (7)$$

$$B_0\,(R)\frac{d^4w_n(x)}{dx^4} + < C > w_n(x) = -w_{n-1}C_1(x). \qquad (8)$$

Ограничимся решением первых двух уравнений вышеприведенной системы уравнений. Уравнение (6) имеет простое решение и дает среднее значение прогибов балки, при этом, учитывая стационарность функций нагрузки и отпора основания, средние значения нагрузки и коэффициента отпора основания являются постоянными величинами, поэтому будем иметь:

$$< w > = \frac{< q >}{< C >}. \qquad (9)$$

Правую часть уравнения (7) представим в виде:

$$\Phi(x) = q_1(x) - < w > C_1(x) = q_1(x) - \frac{<q>}{<C>} C_1(x). \qquad (10)$$

Для решения уравнения (7) удобно использовать метод спектральных представлений. Учитывая тот известный факт, что корреляционная функция и спектральная плотность случайного процесса составляют пару преобразований Фурье, известную как теорема Винера-Хинчина, будем иметь для импеданса уравнения (7) выражение:

$$J(\omega) = B_0\,\omega^4 + < C >. \qquad (11)$$

Тогда передаточная функция H(ω) уравнения (7) будет иметь вид:

$$H(\omega) = \frac{1}{J(\omega)} = \frac{1}{B_0\,(R)\omega^4 + < C >}. \qquad (12)$$

Используя известное соотношение между спектральной плотностью $S_\Phi(\omega)$ на входе в линейную динамическую систему и спектральной плотностью $S_w(\omega)$ на выходе, получаем:

$$S_w(\omega) = |H(\omega)|^2 S_\Phi(\omega) = \frac{S_\Phi(\omega)}{|B_0\,(R)\omega^4 + < C >|^2}. \qquad (13)$$

В этом случае спектральную плотность случайной функции прогибов можно записать с учетом связи случайного процесса на входе и выходе случайного процесса в виде:

$$S_w(\omega) = \frac{S_\Phi(\omega)}{|B_0\,(R)\omega^4 + < C > |^2}. \qquad (14)$$

Преобразовывая (16) по Фурье, получаем корреляционную функцию прогибов балки на упругом основании:

$$K_w(x - x') = \\ = 2\int_0^\infty \frac{S_\Phi(\omega)\,\cos[(x - x')\omega]d\omega}{|B_0\,(R)\omega^4 + <C>|^2}. \qquad (15)$$

Дисперсия прогибов будет равна при $(x - x') = 0$:

$$D_w(R) = K_w(0) = \\ = 2\int_0^\infty \frac{S_\Phi(\omega)\,d\omega}{|B_0\,(R)\omega^4 + <C>|^2}. \qquad (16)$$

Спектральная плотность кривизны балки $S_{w''}(\omega)$ и корреляционная функция кривизны $K_{w''}(x - x')$ будут иметь вид:

$$S_{w''}(\omega) = |H(\omega)|^2 S_\Phi(\omega)\,\omega^4 = \frac{S_\Phi(\omega)\,\omega^4}{|B_0\,(R)\omega^4 + <C>|^2}, \qquad (17)$$

$$K_{w''}(x - x') = 2\int_0^\infty \frac{S_\Phi(\omega)\,\cos[(x - x')\omega]\omega^4 d\omega}{|B_0\,(R)\omega^4 + <C>|^2}. \qquad (18)$$

Тогда дисперсия изгибающих моментов при $(x - x') = 0$ запишется в виде:

$$D_M(R) = B_0^2(R) K_{w''}(0) = 2B_0^2(R) \int_0^\infty \frac{S_\Phi(\omega)\,\omega^4 d\omega}{|B_0(R)\omega^4 + <C>|^2}. \quad (19)$$

Спектральная плотность $S_\Phi(\omega)$ функции $\Phi(x)$ с учетом (10) будет иметь вид:

$$S_\Phi(\omega) = S_q(\omega) + \left(\frac{<q>}{<C>}\right)^2 S_C(\omega). \quad (20)$$

Входными случайными процессами при изгибе железобетонной балки в стохастической постановке являются случайная функция нагрузки $q(x)$ и случайная функция коэффициента постели $C(x)$. Если задать корреляционные функции случайных входных случайных функций в виде, например:

$$K_q(\zeta) = D_q e^{-\rho|\xi|},$$
$$K_c(\zeta) = D_c e^{-\upsilon|\xi|} \cos\varphi\xi, \quad (21)$$

где D_q и D_c – дисперсии внешней нагрузки на балку и коэффициента отпора грунта; ρ, υ, φ – коэффициенты, методика определения которых приведена в [9]; ξ – расстояние между произвольными коррелированными сечениями балки, то в этом случае спектральные плотности этих функций будут иметь вид дробно-рациональных функций:

$$S_C = \frac{\upsilon}{\pi} D_c \left\{ \frac{1}{[(\omega - \varphi)^2 + \upsilon^2]} + \frac{1}{[(\omega + \varphi)^2 + \upsilon^2]} \right\}, \quad (22)$$

$$S_q = \frac{2\rho}{\pi} D_q \left(\frac{1}{\omega^2 + \rho^2}\right). \quad (23)$$

В этом случае спектральная плотность $S_\Phi(\omega)$ функции $\Phi(x)$ будет равна:

$$S_\Phi(\omega) = \frac{2\rho}{\pi} D_q \left(\frac{1}{\omega^2 + \rho^2}\right) + \left(\frac{<q>}{<C>}\right)^2 \frac{\upsilon}{\pi} D_c \left\{ \frac{1}{[(\omega - \varphi)^2 + \upsilon^2]} + \frac{1}{[(\omega + \varphi)^2 + \upsilon^2]} \right\}. \quad (24)$$

При принятых выше в виде (21) корреляционных функциях нагрузки $K_q(\zeta)$ и коэффициента постели $K_c(\zeta)$ и соответствующей им спектральной плотности $S_\Phi(\omega)$ нахождение дисперсий прогибов D_w и изгибающих моментов D_M по формулам (16) и (19) сводится к вычислению интегралов от дробно-рациональной функции вида:

$$I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_n(i\omega) d\omega}{h(i\omega) h(-i\omega)}, \quad (25)$$

где $g_n(i\omega)$ и $h(\pm i\omega)$ – многочлены следующего вида:

$$g_n(z) = a_0 z^{2n-2} + a_1 z^{2n-4} + \dots + a_{n-1}, \quad (26)$$
$$h_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n, \quad b_0 \neq 0. \quad (27)$$

Интеграл вида (25) аналитически вычисляется следующим образом [10]:

$$I_n = \pi i (-1)^{n-1} \frac{N_n}{a_0 D_n}, \quad (28)$$

где N_n – детерминант матрицы, составленной из коэффициентов многочленов $g_n(z)$ и $h_n(z)$:

$$N_n = \det\begin{bmatrix} a_0 & d_{1,2} & d_{1,3} & \cdots & d_{1,n} \\ a_1 & d_{2,2} & d_{2,3} & \cdots & d_{2,n} \\ a_2 & d_{3,2} & d_{3,3} & \cdots & d_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & d_{n,2} & d_{n,3} & \cdots & d_{n,n} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & b_2 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_4 & b_3 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_n \end{bmatrix}, \quad (29)$$

здесь $d_{m,r} = b_{2m-r}$, при этом $b_k = 0$, если $k < 0$ или $k > n$; D_n – определитель матрицы, составленной из коэффициентов многочлена $h_n(z)$:

$$D_n = \det\begin{bmatrix} d_{1,1} & d_{1,2} & d_{1,3} & d_{1,4} & \cdots & d_{1,n} \\ d_{2,1} & d_{2,2} & d_{2,3} & d_{2,4} & \cdots & d_{2,n} \\ d_{3,1} & d_{3,2} & d_{3,3} & d_{3,4} & \cdots & d_{3,n} \\ d_{4,1} & d_{4,2} & d_{4,3} & d_{4,4} & \cdots & d_{4,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n-1} & d_{n,2} & d_{n,3} & d_{n,4} & \ldots & d_{n,n} \end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} b_1 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \cdots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & \cdots & 0 \\ b_7 & b_6 & b_5 & b_4 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_n \end{bmatrix}. \quad (30)$$

Детерминант D_n совпадает с определителем Гурвица и, так как система устойчива, то определитель D_n всегда больше 0.

Наконец, учитывая, что все вышеприведенные выкладки были выполнены для конкретной реализации кубиковой прочности бетона R, которая является случайной величиной с гауссовым распределением $p_R(R)$ с параметрами: математическое ожидание <R> и дисперсия D_R. В этом случае параметры распределений прогибов и изгибающих моментов в балке с учетом того, что жесткость балки является функцией кубиковой прочности бетона, будут иметь вид:

$$< w > = \int_{-\infty}^{\infty} < w(R) > p_R(R)dR; \; D_w = \int_{-\infty}^{\infty} D_w(R)p_R(R)dR; \; D_M = \int_{-\infty}^{\infty} D_M(R)p_R(R)dR. \quad (31)$$

В Ы В О Д Ы

Таким образом, получены вероятностные параметры прогибов и изгибающих моментов в железобетонной балке на упругом стохастически неоднородном основании, загруженной стационарной случайной распределенной нагрузкой с учетом случайной прочности бетона. Данные параметры позволяют оценить вероятность разрушения балки и обеспечить ее прочность с необходимой вероятностью.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A.* Experimental and Theoretical Study of Reinforced Concrete Elements under Different Characteristics of Loading at High Temperatures // Procedia Engineering, – 153, 2016. P.721...725.

2. *Kabantsev O.V., Tamrazian A.G.* Allowing for changes in the calculated scheme during the analysis of structural behaviour // Magazine of Civil Engineering. – 49 (5), 2014. P. 15…26.

3. *Tamrazyan A., Avetisyan L.* Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads // MATEC Web of Conferences 5. Cep. "5th International Scientific Conference "Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education", IPICSE 2016". – 2016. P. 1029.

4. *Tamrazyan A.G.* The assessment of reliability of punching reinforced concrete beamless slabs under the influence of a concentrated force at high temperatures // Procedia Engineering (see in books). – V. 153, 2016. P. 715…720.

5. *Tamrazyan A., Filimonova E.* Searching method of optimization of bending reinforced concrete slabs with simultaneous assessment of criterion function and the boundary conditions // Applied Mechanics and Materials. – V. 467, 2014. P. 404…409.

6. *Деминов П.Д.* К оценке статистических параметров железобетонной балки на упругом основании, имеющем стохастические характеристики // Строительство и реконструкция. – 2018, № 5. С.5…12.

7. *Тамразян А.Г.* Расчет элементов конструкций при заданной надежности и нормальном распределении нагрузки и несущей способности // Вестник МГСУ. – 2012, № 10. С. 109…115.

8. *Болотин В.В.* Об упругих деформациях подземных трубопроводов, прокладываемых в статистически неоднородном грунте // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965, № 1. С.4…8.

9. *Благонадёжин В.Л., Кудрявцев Е.П.* Статистическое исследование деформаций песчаных оснований и трубопроводов подземных волноводных линий связи // В кн.: Доклады научно-технической конференции по итогам научно-исследовательских работ за 1964-1965 г. – М., 1965 (МЭИ).

10. *Миллер В.М., Панков А.Р.* Теория случайных процессов в примерах и задачах. – М.: Физматлит, 2002. С. 308...309.

R E F E R E N C E S

1. Tamrazyan A.G., Avetisyan L.A. Experimental and Theoretical Study of Reinforced Concrete Elements under Different Characteristics of Loading at High Temperatures // Procedia Engineering, – 153, 2016. P.721...725.

2. Kabantsev O.V., Tamrazian A.G. Allowing for changes in the calculated scheme during the analysis of structural behaviour // Magazine of Civil Engineering. – 49 (5), 2014. P. 15…26.

3. Tamrazyan A., Avetisyan L. Comparative analysis of analytical and experimental results of the strength of compressed reinforced concrete columns under special combinations of loads // MATEC Web of Conferences 5. Ser. "5th International Scientific Conference "Integration, Partnership and Innovation in Construction Science and Education", IPICSE 2016". – 2016. P.1029.

4. Tamrazyan A.G. The assessment of reliability of punching reinforced concrete beamless slabs under the influence of a concentrated force at high temperatures // Procedia Engineering (see in books). – V. 153, 2016. P. 715…720.

5. Tamrazyan A., Filimonova E. Searching method of optimization of bending reinforced concrete slabs with simultaneous assessment of criterion function and the boundary conditions // Applied Mechanics and Materials. – V. 467, 2014. P. 404…409.

6. Deminov P.D. K otsenke statisticheskikh parametrov zhelezobetonnoy balki na uprugom osnovanii, imeyushchem stokhasticheskie kharakteristiki // Stroitel'stvo i rekonstruktsiya. – 2018, № 5. S.5…12.

7. Tamrazyan A.G. Raschet elementov konstruktsiy pri zadannoy nadezhnosti i normal'nom raspredelenii nagruzki i nesushchey sposobnosti // Vestnik MGSU. – 2012, № 10. S. 109…115.

8. Bolotin V.V. Ob uprugikh deformatsiyakh podzemnykh truboprovodov, prokladyvaemykh v statisticheski neodnorodnom grunte // Stroitel'naya mekhanika i raschet sooruzheniy. – 1965, № 1. S.4…8.

9. Blagonadezhin V.L., Kudryavtsev E.P. Statisticheskoe issledovanie deformatsiy peschanykh osnovaniy i truboprovodov podzemnykh volnovodnykh liniy svyazi // V kn.: Doklady nauchno-tekhnicheskoy konferentsii po itogam nauchno-issledovatel'skikh rabot za 1964-1965 g. – M., 1965 (MEI).

10. Miller V.M., Pankov A.R. Teoriya sluchaynykh protsessov v primerakh i zadachakh. – M.: Fizmatlit, 2002. S. 308...309.

Рекомендована кафедрой железобетонных и каменных конструкций. Поступила 16.04.18.