УДК 539.3

РАСЧЕТ ИЗГИБАЮЩЕГО МОМЕНТА ДЛЯ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ НИТИ ПРИ ОГИБАНИИ ЕЮ ТРИКОТАЖНОЙ ИГЛЫ

CALCULATION OF THE BENDING MOMENT FOR ELASTO-PLASTIC THREAD WHEN ROUNDING OF THE KNITTED NEEDLE

В.А. ЗАВАРУЕВ, О.Ф. БЕЛЯЕВ, А.А. ФЕДОРОВ
V.A. ZAVARUEV, O.F. BELYAEV, A.A. FEDOROV

(Российский государственный университет имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство), Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана)
(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art), Moscow State Technical University named after N.E. Bauman)
E-mail: vlzavaruev@yandex.ru

Предлагается программный метод расчета зависимости момента, изгибающего упругопластичный материал, от радиуса кривизны изгиба. На разрывной машине получают зависимость нагрузка – удлинение образца, которая переводится в зависимость нормальное напряжение – относительное удлинение, программно оцифровывается и интерполируется. Полученная непрерывная зависимость нормальное напряжение – относительное удлинение используется для расчета зависимости изгибающего момента от радиуса изгиба. Приводятся фрагменты программ для интерполяции и для расчета изгибающего момента. При программировании использовали математический пакет программ Matlab.

A software method is proposed for calculating the dependence of the moment bending an elastoplasto material on the radius of curvature of the bend. On the tensile machine, the load-elongation of the specimen is obtained, the normal stress-elongation is translated into a dependence, programmed and digitized and interpolated. The resulting continuous dependence of the normal stress is a relative elongation and is used to calculate the dependence of the bending moment on the bend radius. The fragments of programs for interpolation and for calculating the bending moment are given. During programming, Matlab software was used.

Ключевые слова: упругопластичный материал, изгиб, изгибающий момент, микропроволока, титан.

Keywords: elastic-plastic material, bending, bending moment, micro wire, titanium.

Для расчета, например, взаимодействия нитей с петлеобразующими органами трикотажных машин и в ряде других случаев необходимо иметь зависимость момента, изгибающего материал, от радиуса кривизны материала, например, микропроволоки [1]. Если материал упругий, то изгибающий момент рассчитывается по формуле [2]:

$$M = EJ_x / \rho,$$

где E – модуль упругости (модуль Юнга); J_x – момент инерции относительно главной центральной оси, перпендикулярной к плоскости изгибающего момента. Для круглого сечения, с которым мы обычно и имеем дело, $J_x = \pi \cdot d^4/64$, где d – диаметр поперечного сечения.

В случае упругопластичного материала ситуация усложняется. Здесь можно использовать графический метод, предложенный Феодосьевым [2]. Для его использования необходимо иметь деформационную кривую материала и форму поперечного его сечения. Этот метод довольно трудоемок, и конечный результат может иметь достаточно большую погрешность. Мы предлагаем использовать для этих целей не графический, а программный метод расчета. Суть метода заключается в следующем. На разрывной машине снимаем деформационную кривую материала, получаем зависимость F от $\Delta\ell$, где F – усилие растяжения; $\Delta\ell$ – удлинение материала. Определяем нормальное напряжение σ=F/S, где S – площадь поперечного сечения образца; относительное удлинение $\varepsilon = \Delta\ell/\ell_0$ (ℓ_0 – исходная длина образца). Затем графически строим зависимость $\sigma(\varepsilon)$, например, для титановой микропроволоки ∅67 мкм (рис. 1 – непрерывная линия).

Для расчета изгибающего момента необходимо получить аналитическую зависимость $\sigma(\varepsilon)$. Мы пытались сначала сделать это двумя способами – подобрать подходящую формулу, используя метод наименьших квадратов, или аппроксимируя эту зависимость двумя прямыми линиями 1 и 2 (рис.1). Однако оба подхода оказались довольно трудоемкими, и, кроме того, из-за не точного описания формы искомой зависимости результат получался довольно приближенным. Поэтому в дальнейшем мы перешли к третьему способу, оказавшемуся сравнительно простым, довольно точным, результат которого нас вполне удовлетворил.

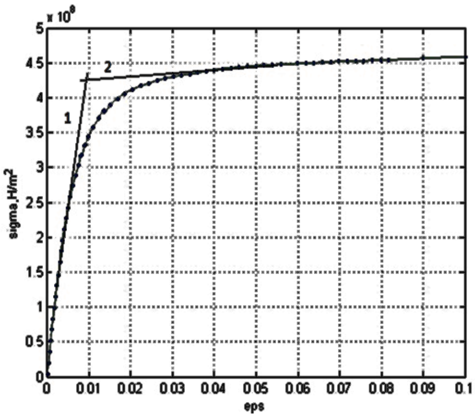

Рис. 1

Способ заключался в следующем.

Копируем графическую зависимость на сканере и с помощью, например, программы GetData, производим ее оцифровку. При этом вся зависимость $\sigma(\varepsilon)$ разбивается на отдельные точки (рис.1), расстояние между которыми определяем сами. В результате получаем матрицу, в которой находятся координаты этих точек (ε,σ), то есть имеем дискретную зависимость $\sigma(\varepsilon)$ (рис. 1 – точки).

После оцифровки с помощью интерполяции нужно получить непрерывную зависимость $\sigma(\varepsilon)$. Мы это делали с помощью пакета программ Matlab R2015b (лицензия 1096205), используя, например, две команды:

epsi=0:depsi:epsmax0; (Под epsmax0 понимаем в нашем случае максимальное значение ε. Согласно рис.1 оно равно ε_{max}=0,1).

sigmai=interp(eps,sigma,epsi,'spline');

Эти две команды позволяют получить путем интерполяции новые значения epsi от нуля до заданного значения epsmax0 с шагом depsi. Первая команда определяет, для каких значений ε будут рассчитываться значения σ. Мы выбрали величину шага depsi= =0,0000001. При такой малой величине шага можно считать, что получаем практически непрерывную зависимость $\sigma(\varepsilon)$. Вторая команда путем интерполяции определяет значения sigmai, соответствующие выбранным значениям epsi. 'spline' показывает, что интерполяция производится с помощью сплайнов; eps, sigma – значения ε, σ, которые программа берет из матрицы.

Сравнение с исходной графической зависимостью свидетельствует, что результаты оцифровки и результаты интерполяции хорошо описывают графическую зависимость $\sigma(\varepsilon)$.

Перейдем теперь непосредственно к расчетам изгибающего момента.

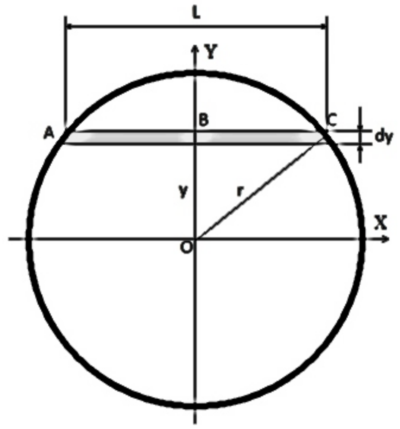

Рис. 2

На рис. 2 представлено поперечное сечение микропроволоки радиусом r. Предположим, что изгиб производится относительно нейтральной оси X, радиус изгиба микропроволоки R. Пусть для определенности изгиб производится в таком направлении, что верхняя часть ($y \geq 0$) поперечного сечения микропроволоки растягивается, а нижняя ($y \leq 0$) сжимается. При расчетах обычно полагают, что диаграммы растяжения и сжатия одинаковы [2]. На расстоянии y от нейтральной оси (от оси X) относительное изменение длины материала $\varepsilon = y/R$ [2], только для верхней половины поперечного сечения оно положительно, а для нижней – отрицательно. Наибольшее значение ε (ε_{max}) имеет место при y = r. Для каждого радиуса изгиба R величина ε_{max} своя, причем тем большая, чем меньше R, но она не может превышать epsmax0. Для микропроволоки диаметром 67 мкм это будет достигнуто при радиусе кривизны микропроволоки $R_{min} = r/\varepsilon_{max} \approx 0{,}33$ мм. Расчет для меньших радиусов кривизны проводить нельзя, поскольку используемые данные выходят за пределы полученной зависимости $\sigma(\varepsilon)$.

Разделим верхнюю половину поперечного сечения микропроволоки на отдельные полоски, ширина i-й полоски dy_i и длина

$$L_i = AC = 2BC = 2\sqrt{r^2 - y_i^2}\ .$$

Площадь полоски

$$dS_i = L_i dy_i = 2\sqrt{r^2 - y_i^2}\,dy_i\,.$$

Затем переходим от переменной y к переменной ε.

Согласно формуле $\varepsilon = y/R$ каждому значению ε_i при заданном R соответствует свое значение $y_i = \varepsilon_i R$. Тогда ширина полоски $dy_i = d\varepsilon_i R$. Для каждой величины R будет свое собственное значение $\varepsilon_{max} = y_{max}/R = r/R$. Эта величина для минимального радиуса R равняется epsmax0 (в нашем случае 0,1), а для других R она будет меньше.

Далее рассчитываем нормальное напряжение на данной i-й полоске:

$$dN_i = \sigma_i dS_i = 2\sqrt{r^2 - y_i^2}\,\sigma_i dy_i\,.$$

Величину σ_i машина определяет расчетом по формуле:

sigmai=interp(eps,sigma,epsi,'spline').

Это напряжение создает относительно нейтральной оси X изгибающий момент:

$$dM_i = dN_i y_i = 2\sqrt{r^2 - y_i^2}\,\sigma_i y_i dy_i\,.$$

Учитывая, что на симметрично расположенной относительно оси X полоске в нижней половине поперечного сечения изгибающий момент будет таким же по величине (но не растягивающим, а сжимающим), общий момент от этих двух полосок будет вдвое большим.

Общий момент, изгибающий микропроволоку относительно оси X, может быть рассчитан по формуле:

$$M=4\sum_{1}^{n}\sqrt{r^2-y_i^2}\,\sigma_i y_i dy_i\ .$$

Здесь n – число полосок, на которые разбита верхняя половина поперечного сечения.

Далее запишем фрагмент программы для расчета изгибающего момента M: epsi=0: depsi:r/R; % (Задаются начальные и конечные значения ε и шаг изменения величины ε для заданного R) yi=epsiR; % (Рассчитывается координата yi для каждой i-й полоски) dyi=depsiR; % (Рассчитывается ширина каждой полоски Li=2sqrt(r^2-yi.^2); % (Рассчитывается длина каждой i-й полоски) dSi=Li.dyi; % (Рассчитывается площадь каждой i-й полоски, точка после Li показывает, что умножаются элементы, относящиеся к одной и той же полоске). sigmai= =interp1(eps,sigma,epsi,’spline’);%(Расчитывается σ_i для каждой i-й полоски) dNi= =sigmai.dSi; % (Рассчитывается нормальная сила, действующая на каждую i-ю полоску. Точка после sigmai означает, что перемножаются только элементы, соответствующие друг другу). dMi=dNi.yi; % (Расчитывается изгибающий момент, действующий на каждую i-ю полоску при y≥0). M=2sum(dMi) % sum(dMi) %(Суммирует все dMi для верхней половины поперечного сечения и умножает на 2, что дает общий изгибающий момент для всех полосок, учитывая и y≤0). (В Matlab символ % означает, что после него идет комментарий, не обрабатываемый программой, символ ; - означает, что результат расчета для этой строки не выводится на экран).

На рис. 3 (представлена зависимость момента M, изгибающего титановую микропроволоку ∅67 мкм, от обратного радиуса кривизны (от кривизны) микропроволоки 1/R. Эта зависимость рассчитана по приведенной программе.

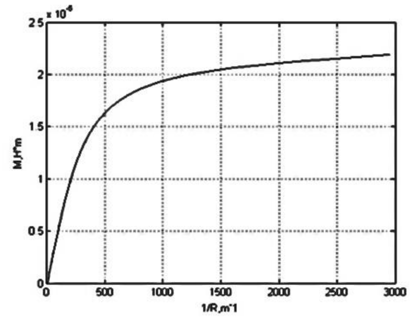

Рис. 3

Видим, что по виду она похожа на зависимость σ(ε). Описанный подход к определению зависимости M(1/R) можно использовать для любого сплошного упругопластичного материала, если известна зависимость σ(ε) и профиль поперечного сечения образца.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беляев О.Ф., Заваруев В.А., Кудрявин Л.А.* Теоретическое исследование взаимодействия металлической мононити с петлеобразующими органами трикотажных машин при линейном контакте // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2008, №3. С.99...104.

2. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999.

REFERENCES

1. Belyaev O.F., Zavaruev V.A., Kudryavin L.A. Teoreticheskoe issledovanie vzaimodeystviya metallicheskoy mononiti s petleobrazuyushchimi organami trikotazhnykh mashin pri lineynom kontakte // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2008, №3. S.99...104.

2. Feodos'ev V.I. Soprotivlenie materialov. – M.: Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana, 1999.

Рекомендована кафедрой проектирования и художественного оформления текстильных изделий РГУ им. А.Н. Косыгина. Поступила 05.04.18.