

УДК 677.4.074:539.4

**СХОДСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ УПРУГОЙ НИТИ**

**SIMILAR PROBLEMS OF THE MECHANICS OF AN ELASTIC STRING**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.С. СКУЛАНОВА, Т.И. ПОЛЯКОВА, С.Л. ХАЛЕЗОВ*

*V.P. SCHERBAKOV, N.S. SKULANOVA, T.I. POLJAKOVA, S.L. KHALEZOV*

(Российский государственный университет  
имени А.Н. Косыгина (Технологии. Дизайн. Искусство),  
Ивановский государственный политехнический университет)

(Russian State University named after A.N. Kosygin (Technologies. Design. Art)  
Ivanovo State Polytechnical University)

E-mail: victor.scherbackow2012@yandex.ru

*Рассмотрены взаимодействие нити с цилиндром и прочность скрученной в два сложения нити с учетом жесткости при кручении и изгибе. В двух различных задачах механики упругой нити: 1) взаимодействие нити с шероховатым цилиндром в нелинейной постановке, 2) расчет прочности скрученной в два сложения нити – с единых теоретических позиций получен сходственный результат.*

*Are considered interaction of a string with the cylinder and durability of the string braided in two additions in view of rigidity at torsion and a bend. In two various problems(tasks) of the mechanics of an elastic string: 1) interaction of a string with the rough cylinder in nonlinear statement, 2) calculation of durability of the string braided in two additions - from uniform theoretical positions is received сходственный result.*

**Ключевые слова:** нить, жесткость, натяжение, кручение, изгиб, сила, момент, прочность.

**Keywords:** string, rigidity, tension, torsion, bend, force, moment, durability.

Сложность задач механики нити различна. Среди них есть относительно простые и сложные. При расчете гибкой нити предполагается, что из внутренних сил в ней возникает лишь осевая сила – натяжение  $T$ . Но текстильная нить существует как одномерное гибкое тело с малой изгибной

жесткостью лишь потому, что в ней даже при отсутствии внешней нагрузки реально присутствуют натяжения волокон, перерезывающие силы, контактная нагрузка между волокнами, внутренние изгибающие и крутящие моменты. Статике и движению сопротивляющейся изгибу нити посвящено

огромное количество работ. При этом решения получаются зачастую прямо противоположные: часть из них дают *уменьшение* натяжения ведущей ветви упругой нити по сравнению с гибкой нитью [8], другие – *увеличение*. Наиболее полное и корректное решение дано в известной статье П.М. Огибалова, А.Л. Рабиновича, Н.М. Федотова 1939 года [1], статьях В.М. Кагана и В.П. Щербакова [2], [3], в книгах В.М. Кагана [4], В.П. Щербакова [5], [6]. Так же, как и в случае упругой нити на поверхности, теории скрученных нитей зачастую прямо противоположно объясняют взаимодействие одиночных нитей в структуре скрученных. В связи с этим в данной статье показана связь между этими двумя задачами, позволяющая избежать возможных ошибок.

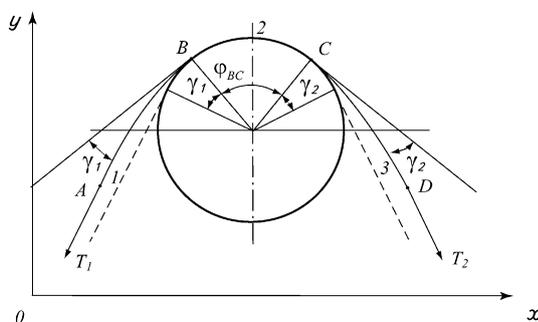


Рис. 1

Тонкая нить движется с малой постоянной скоростью в плоскости, перпендикулярной оси кругового цилиндра радиуса R (рис. 1 – расчетная схема взаимодействия упругой нити с цилиндром), от точки А к точке D и на участке BC касается цилиндра.

Имеем уравнения равновесия упругой нити в проекциях на касательную  $\tau$  и главную нормаль  $\nu$ :

$$\begin{aligned} \frac{dT}{ds} - \frac{Q}{\rho} + f_{\tau} &= 0, \\ \frac{dQ}{ds} + \frac{T}{\rho} + f_{\nu} &= 0, \\ \frac{dM}{ds} + Q &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $f_{\tau}$  и  $f_{\nu}$  – внешние касательная и нормальная распределенные силы, приложенные к нити.

Прежде всего надо учесть, что на границе контактной зоны возникает сосредоточенная контактная сила. Необходимость возникновения сосредоточенных реакций в точках набегания и схода нити с поверхности показана в [1...5]. Почти все работы в рассматриваемой области попросту игнорируют стыковку двух участков нити в точке набегания В. В данной статье изучается соответствие отдельных задач, на первый взгляд, существенно различных, но при анализе решений оказывающихся почти сходственными. Поэтому этот вопрос влияния сосредоточенной силы на состояние упругой нити, являющийся решающим в подобных задачах, здесь не излагается.

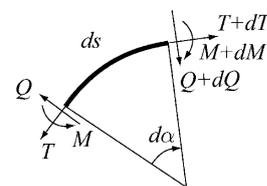


Рис. 2

Определим направления перерезывающих сил Q, приложенных на торцах элемента нити длиной ds (рис. 2 – равновесие набегающей ветви нити). В точке В силы реакции, направленные вверх, содержат сосредоточенную силу, которая должна быть уравновешена поперечной силой, направленной вниз. На левом торце выделенного элемента перерезывающая сила будет направлена вверх. Кроме того, из третьего уравнения системы (1) при отрицательном изгибающем моменте М сила Q тоже должна быть отрицательной, то есть направленной от центра кривизны. На свободном участке CD нити происходит ее разгибание, изгибающий момент уменьшает по абсолютному значению отрицательную кривизну и поэтому считается положительным. В точке С сосредоточенная сила реакции уравновешивается перерезывающей силой Q, направленной вниз, то есть сила Q является положительной. Таким образом, уравнения (1) описывают напряженное состояние любого участка нити.

Рассмотрим равновесие элемента нити, соответствующего состоянию участка 1 набегающей на цилиндр ветви нити. В ветви

AB происходит нагрузка – сгибание, направление усилий показано на рис. 2. Система дифференциальных уравнений (1) примет вид:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{Q}{\rho}, \quad (2)$$

$$\frac{dQ}{ds} = -\frac{T}{\rho}, \quad (3)$$

$$\frac{dM}{ds} = -Q, \quad (4)$$

$$\frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho}, \quad (5)$$

$$M = \frac{H}{\rho}. \quad (6)$$

Из уравнений (2) и (3) определяем кривизну оси нити:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{Q} \frac{dT}{ds},$$

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{1}{T} \frac{dQ}{ds}.$$

Приравниваем эти выражения и после интегрирования получаем первый интеграл  $T^2 + Q^2 = C$ . Отсюда следует, что при отсутствии внешних сил векторная сумма внутренних сил – натяжения и перерезывающей силы – постоянна. Другими словами, при увеличении  $Q$  натяжение нити  $T$  уменьшается. Следует ожидать, что по мере искривления нити на первом участке AB из-за возрастания перерезывающей силы натяжение будет снижаться. В полной мере сказанное относится и к третьему участку CD.

Чтобы найти произвольную постоянную  $C$ , используем наши предположения о силах, действующих в точке A. Отсчет угла  $\alpha$  ведем от направления  $T_1$ , то есть в точке A  $\alpha = \alpha_0$ . Раскладывая силу  $T_1$  на касательную и нормальную, получим:

$$T|_{\alpha=\alpha_0} = T_1 \cos \alpha_0,$$

$$Q|_{\alpha=\alpha_0} = \pm T_1 \sin \alpha_0.$$

Знак  $\pm$  выбран потому, что направление перерезывающей силы пока неизвестно, хотя предположение о действии поперечных сил было нами высказано при рассмотрении равновесия элемента нити ранее. Тогда имеем:

$$T^2 + Q^2 = T_1^2. \quad (7)$$

Из последнего соотношения выражаем  $Q$  через  $T$  и подставляем в (2). С учетом (5) получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{T_1^2 - T^2}} \frac{dT}{ds} = \frac{d\alpha}{ds}. \quad (8)$$

После интегрирования имеем:

$$\arcsin \frac{T}{T_1} = \alpha + C, \text{ или } \sin(\alpha + C) = \frac{T}{T_1}.$$

В точке A угол  $\alpha = \alpha_0$ , натяжение, с одной стороны, равно  $T = T_1 \cos \alpha_0$ , с другой, из последнего равенства  $T = T_1 \sin(\alpha + C)$ . Тогда новая произвольная постоянная равна  $C = \pi/2$ . С учетом этого выражение для перерезывающей силы принимает вид:

$$Q = T_1 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -T_1 \sin \alpha. \quad (9)$$

Видно, что наше предположение о направлении силы  $Q$  от центра кривизны подтвердилось. Направление перерезывающей силы рассмотрено столь подробно потому, что это определяет направление сил и изгибающих моментов в сечениях всей нити и в конечном счете решает вопрос о зависимости конечного натяжения нити от жесткости при изгибе.

Подставим выражение для  $Q$  в уравнение (4):

$$\frac{dM}{ds} = T_1 \sin \alpha.$$

Так как

$$\frac{dM}{ds} = \frac{dM}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = \frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\alpha} = \frac{M}{H} \frac{dM}{d\alpha},$$

то последнее уравнение записывается в виде:

$$\frac{MdM}{ds} = T_1 H \sin \alpha.$$

Интегрируя, получаем:

$$M^2 = -2T_1 H \cos \alpha + C.$$

Принимая во внимание, что в точке А изгибающий момент  $M=0$  и  $\alpha=\alpha_0$ , имеем:

$$C = 2T_1 H \cos \alpha_0.$$

Окончательно:

$$M^2 = 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \alpha).$$

Обозначим величину угла  $\alpha$  в точке В через  $\gamma_1$ , то есть  $\gamma_1 = \alpha_B$ . Тогда в сечении В имеем:

$$\begin{aligned} T_{B1} &= T_1 \cos \gamma_1, \\ Q_{B1} &= -T_1 \sin \gamma_1, \\ M_{B1}^2 &= 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \gamma_1). \end{aligned}$$

Так как кривизна оси нити является непрерывной функцией (сосредоточенные моменты отсутствуют), то радиус кривизны в точке В равен  $R$ , и  $M_{B1} = \frac{H}{R}$ .

Находим

$$\gamma_1 : \frac{H^2}{R^2} = 2HT_1 (\cos \alpha_0 - \cos \gamma_1).$$

Отсюда:

$$\cos \gamma_1 = \cos \alpha_0 - \frac{H}{2T_1 R^2}. \quad (10)$$

Введем безразмерный коэффициент подобия  $k = \frac{H}{2T_1 R^2}$ . Этот коэффициент характеризует поведение нити в зависимости от жесткости, натяжения и радиуса цилиндра. Увеличение радиуса или натяжения равносильно уменьшению жесткости. Случай абсолютно гибкой нити соответствует  $k=0$ .

Дальнейший вывод пропускаем, он подробно изложен в указанной выше литературе. Приведем окончательный результат:

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \gamma_1 + \mu \sin \gamma_1}{\cos \gamma_2 - \mu \sin \gamma_2} e^{\mu(\varphi - \gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (11)$$

Угол  $\gamma_2$  зависит от силы  $T_2$ . Эта зависимость аналогична выражению (10):

$$\cos \gamma_2 = \cos \alpha_1 - \frac{H}{2T_2 R^2} = \cos \alpha_1 - k \frac{T_1}{T_2}. \quad (12)$$

В равенства (10) и (12) входят значения  $\alpha_0$  и  $\alpha_1$ . Для их определения надо получить уравнения формы оси нити на свободных участках 1 и 2. Форма упругой линии зависит от длины нити, то есть от расстояния точек приложения сил  $T_1$  и  $T_2$  от центра окружности, огибаемой нитью. Если принять, что это расстояние достаточно велико, то можно считать, что  $\alpha_0 = \alpha_1 = 0$  и  $\cos \alpha_0 = \cos \alpha_1 = 1$ . Тогда выражения (10) и (12) упростятся:

$$\cos \gamma_1 = 1 - k, \quad \cos \gamma_2 = 1 - k \frac{T_1}{T_2}. \quad (13)$$

Для оценки влияния жесткости на натяжения выберем нить с большой жесткостью при изгибе, используемую в материалах специального назначения, – нить русар линейной плотности 29 текс. Данные для расчета: прочность (разрывная нагрузка) 66,7 Н, жесткость при изгибе 6,8 сН·мм<sup>2</sup>, диаметр цилиндра 0,4 мм, коэффициент трения нити по цилиндру 0,25, угол охвата в предположении, что нить гибкая – 0,9π, натяжение входящей ветви нити 50 сН. Если считать нить абсолютно гибкой, по формуле Эйлера получаем натяжение на выходе 101,4 сН. Вычисления по изложенной теории дают: натяжение 83,1 сН, углы  $\gamma_1 = 1,286$  рад,  $\gamma_2 = 0,967$ , действительный угол охвата 0,574 рад. Если же учесть кроме изгибных перемещений также сдвиговые деформации ("балка Тимошенко") [2], [3], [5], то имеем: натяжение 77,0 сН, углы  $\gamma_1 = 1,32$ ,  $\gamma_2 = 1,03$ . Последний результат яв-

ляется наиболее точным. Что же касается вычислений по формуле Эйлера, то для жестких нитей она непригодна; расчеты нитей для технических текстильных материалов возможны только на основе теорий, изложенных в [2], [3], [5].

В литературе не раз отмечалось, что только благодаря упругой природе нитей текстильные материалы существуют как одно- и двумерные гибкие твердые тела. В скрученной в два сложения нити даже при отсутствии внешних сил и моментов имеются [6]: приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка:

$$q_0 = B \frac{1}{4R^3(1+e)},$$

натяжение каждой из нитей в составе скрученной:

$$T = B \frac{1}{4R^2(1+e)},$$

перерезывающая сила:

$$Q = B \frac{\sqrt{1+2e}}{4R^2(1+e)},$$

изгибающий момент:

$$M_{\text{и}} = H \frac{1}{2R(1+e)},$$

крутящий момент:

$$M_{\text{к}} = B \frac{\sqrt{1+2e}}{2R(1+e)}.$$

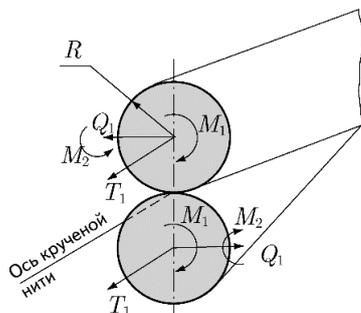


Рис. 3

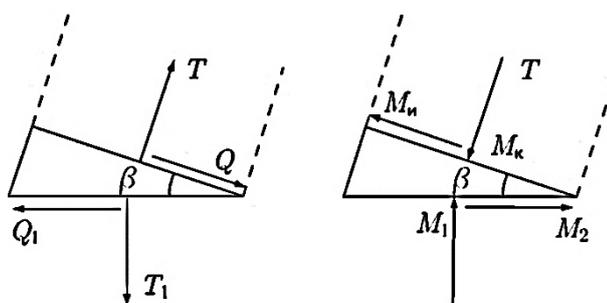


Рис. 4

Здесь обозначены:  $B$  – жесткость при кручении;  $e = H/B$  – отношение жесткостей. Так же, как и в предыдущей задаче, для скрученных нитей разработаны многочисленные теории, зачастую прямо противоположно объясняющие взаимодействие одиночных нитей в структуре скрученных. Во всей отечественной литературе существует единственная (на наш взгляд, ошибочная) точка зрения – контактная нагрузка увеличивает прочность скрученной нити. Покажем, как и в задаче о взаимодействии жесткой нити с шероховатым цилиндром, влияние жесткости нити при кручении и изгибе на прочность скрученной нити, основываясь на книге [6].

Сечение каждой из двух нитей представляет собой круг радиусом  $R$ , а осевая линия нити – винтовую линию с углом подъема  $\beta$  и радиусом, равным радиусу поперечного сечения крученой нити, то есть тоже  $R$ . Кривизна винтовой линии является постоянной,  $\kappa_3 = \sin^2\beta/R$ , кручение  $\kappa_1 = \sin\beta\cos\beta/R$ . Между нитями вдоль винтовой линии возникает контактная равномерно распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . У винтовой линии главная нормаль  $\nu$  пересекает ось нити под прямым углом и совпадает с ее радиусом. Возьмем на поверхности одной нити произвольную точку касания. Вследствие свойств винтовой линии нормаль  $\nu$  в этой точке является одновременно нормалью к поверхности второй изогнутой по винтовой линии нити. Последовательность точек касания образует ось крученой нити. Линия контакта, образуемая точками касания ось крученой нити, является прямой линией (рис. 3 – к равновесно скрученной нити).

Система самоуравновешенных внутренних сил, действующих в сечении крученой нити, сводится к моментам  $M_1$  и  $M_2$ , силам  $T_1$  и  $Q_1$ . Общее для двух нитей сечение не перпендикулярно осевым винтовым линиям каждой из них. Поэтому рассматриваемые в сечении крученой нити моменты  $M_1$  и  $M_2$  не могут быть ни крутящими, ни изгибающими так же, как силы  $T_1$  и  $Q_1$  не являются соответственно ни растягивающей, ни перерезывающей. В сечениях, перпендикулярных оси каждой из нитей, возникают изгибающий момент  $M_{и}$ , крутящий момент  $M_{к}$ , растягивающая (натяжение)  $T$  и перерезывающая  $Q$  силы (рис. 4 равновесие сил и моментов). Выражение, связывающее силу, действующую в сечении крученой нити  $Q_1$ , с контактной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , возникающей между нитями вдоль винтовой линии:  $Q_1 = qRctg\beta$ . В скрученной нити, нагружаемой усилием  $P_k$ , появляется натяжение одиночных нитей  $T$ , распределенная нагрузка интенсивностью  $q$ . Вводится приведенная к осевой линии нити контактная нагрузка  $q_0$ , равная  $q_0 = q\cos\beta$ . Натяжение  $T$  связано с  $q_0$  соотношением [6]:

$$q_0 = \frac{(TR^2 + B\cos^2\beta)\sin^2\beta}{R^3(1 + \cos^2\beta)}. \quad (14)$$

Связь натяжения  $T$  одиночных нитей с усилием  $P_k$ , растягивающим скрученную нить, описывается формулой:

$$P_k = \frac{2}{\cos\beta}(T - q_0R). \quad (15)$$

Если натяжение  $T$  становится равным прочности одиночной нити  $T^*$ , то соответственно приходим к прочности скрученной  $P_k^*$ .

Теперь заметим, что нагрузка  $q_0$  в соответствии с (15) уменьшает прочность скрученной нити  $P_k^*$ . В свою очередь  $q_0$  определяется соотношениями  $Q_1 = qRctg\beta$ ,  $Q = Q_1\cos\beta - T_1\sin\beta$  и, таким образом, обуславливается перерезывающей силой  $Q$ .

Так же, как и в предыдущей задаче о взаимодействии упругой нити с цилиндром, получаем сходственный результат: с увеличением перерезывающей силы натяжение  $P_k$  уменьшается. Здесь с возрастанием крутки увеличивается и кривизна винтовой линии (одиночной нити), и перерезывающая сила, и, следовательно, нагрузка  $q_0$  (рис. 5 – зависимость прочности нити от вторичной крутки).

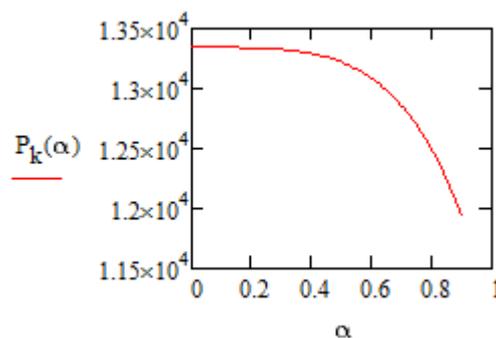


Рис. 5

Здесь нами даже не затрагивается реальный экстремальный характер зависимости прочности скрученной нити от крутки. В [7] изложены качественные и количественные соображения, позволяющие объяснить наблюдаемое изменение  $P_k^*(\alpha)$ .

## ВЫВОДЫ

В двух различных задачах механики упругой нити: 1) взаимодействие нити с шероховатым цилиндром в нелинейной постановке, 2) расчет прочности скрученной в два сложения нити – с единых теоретических позиций получен сходственный результат.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Огибалов П.М., Рабинович А.Л., Федотов Н.М.* О силах взаимодействия между тросом и шкивом // Прикладная математика и механика. – 1939. Т. 3, вып. 3. С. 111...123.
2. *Каган В.М., Щербаков В.П.* Уточнения и дополнения к решению задачи о равновесии упругой нити на цилиндре. Сообщение 1 // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №2. С. 86...91.

3. Кaгaн В.М., Щeрбaкoв В.П. Уточнения и дополнения к решению задачи о равновесии упругой нити на цилиндре. Сообщение 2 // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №4. С. 71...77.

4. Кaгaн В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

5. Щeрбaкoв В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов. – М.: МГТУ имени А.Н. Косыгина, 2008.

6. Щeрбaкoв В.П. Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М.: "Рисо Принт", 2013.

7. Щeрбaкoв В.П., Скуланова Н.С., Денисова Е.В. Феноменологическое описание разрушения неоднородных нитей с учетом блокировки слабых мест // Химические волокна. – 2016, №6. С. 46...49.

8. Wei M., Rongjuan Chen. // Text. Res. J. – 68(7), 1998. P. 487...492.

#### REFERENCES

1. Ogibalov P.M., Rabinovich A.L., Fedotov N.M. O silakh vzaimodeystviya mezhdu trosom i shkivom // Prikladnaya matematika i mekhanika. – 1939. T. 3, vyp. 3. S. 111...123.

2. Kagan V.M., Shcherbakov V.P. Utochneniya i dopolneniya k resheniyu zadachi o ravnovesii uprugoy niti na tsilindre. Soobshchenie 1 // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2003, №2. S. 86...91.

3. Kagan V.M., Shcherbakov V.P. Utochneniya i dopolneniya k resheniyu zadachi o ravnovesii uprugoy niti na tsilindre. Soobshchenie 2 // Izv. vuzov. Tekhnologiya tekstil'noy promyshlennosti. – 2003, №4. S. 71...77.

4. Kagan V.M. Vzaimodeystvie niti s rabochimi organami tekstil'nykh mashin. – М.: Legkaya i pishchevaya promyshlennost', 1984.

5. Shcherbakov V.P., Skulanova N.S. Osnovy teorii deformirovaniya i prochnosti tekstil'nykh materialov. – М.: MGTU imeni A.N. Kosygina, 2008.

6. Shcherbakov V.P. Prikladnaya i strukturnaya mekhanika voloknistykh materialov. – М.: "Riso Print", 2013.

7. Shcherbakov V.P., Skulanova N.S., Denisova E.V. Fenomenologicheskoe opisanie razrusheniya neodnorodnykh nitey s uchetom blokirovki slabykh mest // Khimicheskie volokna. – 2016, №6. S. 46...49.

8. Wei M., Rongjuan Chen. // Text. Res. J. – 68(7), 1998. P. 487...492.

Рекомендована кафедрой текстильных технологий РГУ имени А.Н. Косыгина. Поступила 10.12.19.