УДК 677.055:677.017.36

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КОМПЕНСИРУЮЩЕГО УСТРОЙСТВА ПРИ ФОРМИРОВАНИИ ТРИКОТАЖНОГО ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ

И.В.ФРОЛОВА, Ф.Р.КАХРАМАНОВ, О.А.ГОЛУБЕВА, Т.В. СМИРНОВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

При изменении входного натяжения нити на трикотажной машине происходит перераспределение нагрузок, воздействующих на нить при ее кулировании, в результате чего изменяется соотношение между потреблением нити иглами со стороны нитевода и уже образованными петлями.

С целью стабилизации натяжения нити, особенно при смене направления ее движения, связанного с петлеобразованием, необходимо знать перемещения и напряжения в прутковом механизме компенсирующего устройства в форме круглого прутка с внешним радиусом b и внутренним a (рис.1), изгибаемого моментом М.

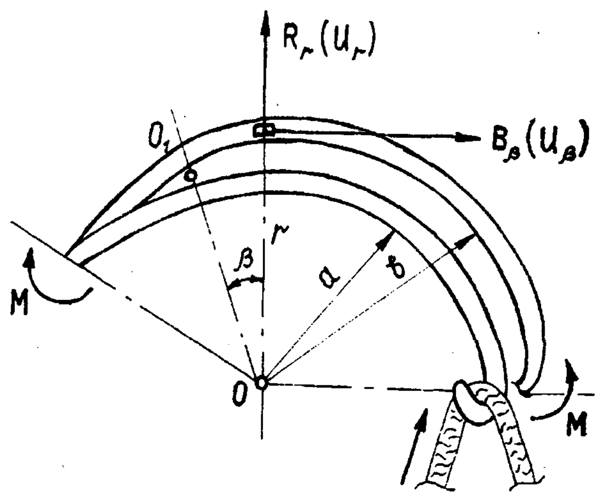

Рис. 1

Для решения задачи воспользуемся основными уравнениями перемещений [1]:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+\frac{1-\sigma}{2r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)U_r+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{2r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{3-\sigma}{2r^2}\right)U_\beta+\frac{1-\sigma^2}{E}R=0,\\ &\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\frac{1}{r^2}\right)U_r+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{1-\sigma}\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)U_\beta+\frac{2(1+\sigma)}{E}B=0.\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

Произведя замену переменных по формуле

$$r=e^t\ (t=\ln(r)),\qquad(2)$$

приведем уравнения (1) к уравнениям с постоянными коэффициентами:

$$\left.\begin{aligned}&\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1+\frac{1+\sigma}{2}+\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)U_r+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{2}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{3-\sigma}{2}\right)U_\beta+\frac{1-\sigma^2}{E}e^{2t}R(t)=0,\\ &\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\frac{\partial}{\partial t}+\frac{3-\sigma}{1-\sigma}\right)U_r+\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}-1+\frac{2}{1-\sigma}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)U_\beta+\frac{2(1+\sigma)}{E}e^{2t}B(t)=0.\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

С помощью функций перемещений-напряжений решение однородных уравнений (1) с их последующими преобразованиями можно принять в форме Б.Г. Галеркина:

$$\left.\begin{aligned} U_r &= -\frac{1}{2G}\left((1+\sigma)\frac{\partial\varphi}{\partial r} - 2(\cos(\beta)\nabla^2\varphi_1 + \sin(\beta)\nabla^2\varphi_2)\right) + a\sin(\beta) + b\cos(\beta), \\ U_r &= -\frac{1}{2G}\left(\frac{(1+\sigma)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} - 2(\sin(\beta)\nabla^2\varphi_1 - \cos(\beta)\nabla^2\varphi_2)\right) + a\cos(\beta) - b\sin(\beta), \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

где φ_i – произвольные бигармоничные функции

$$\varphi = \cos(\beta)\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} - \frac{\sin(\beta)}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} +$$

$$+\sin(\beta)\frac{\partial\varphi_2}{\partial r} + \frac{\cos(\beta)}{r}\frac{\partial\varphi_2}{\partial\beta},$$

a, b, c – постоянные, характеризующие перемещение твердого тела (прутка компенсатора); β – полярный угол.

Общее решение (R=B=0) плоского напряженного состояния компенсатора найдем с помощью основных уравнений напряжений

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial R_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial R_\beta}{\partial\beta} + \frac{R_r - B_\beta}{r} + R = 0, \\ &\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial B}{\partial\beta} + \frac{2B_r}{r} + B = 0, \\ &\nabla^2(R_r + B_\beta) = 0, \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

где

$$\nabla^2(R_r + B_\beta) = \frac{\partial^2(R_r + B_\beta)}{\partial r^2} +$$

$$+\frac{1}{r}\frac{\partial(R_r + B_\beta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2(R_r + B_\beta)}{\partial\beta^2},$$

и с помощью функции напряжений из (5)

$$\left.\begin{aligned} &R_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2},\ B_\beta = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}, \\ &B_r = R_\beta = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\partial\beta}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

При заданном значении напряжений в формулах (6) систему уравнений (5) приведем к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2\nabla^2\varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\right)^2 \varphi = 0. \quad (7)$$

Из известных частных решений уравнения (7) найдем

$$\left.\begin{aligned} &\varphi(r,\beta) = A_0^* + B_0\beta + A\ln(r) + Br^2 + Cr^2 + Dr\beta{}^{\cos}_{\sin}\beta + (A_1 r^* + B_1 r^3 + C_1 r^{-1} + \\ &+ D_1 r\ln(r)){}^{\sin}_{\cos}\beta - \frac{2D}{1-\sigma}r\beta{}^{\cos}_{\sin}\beta^{**} + \sum_{m=2,3}^{\infty}(A_m r^m + B_m r^{(m+2)} + C_m r^{-m} + D_m r^{2-m})\cdot \\ &\cdot{}^{\sin}_{\cos}(m\beta) + \sum_{m=2,3}^{\infty} r^m(A_m\cos(m\beta) + B_m\sin(m\beta) + C_m\cos((m-2)\beta) + D_m\sin((m-2)\beta)). \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

При полярно-симметричных задачах вместо (7) имеем

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\varphi=\frac{\partial^4\varphi}{\partial r^4}+\frac{2}{r}\frac{\partial^3\varphi}{\partial r^3}-\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r^3}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=0, \tag{9}$$

общее решение которого

$$\varphi=A\ln(r)+Br^2\ln(r)+Cr^2+D. \quad (10)$$

Согласно (10) запишем функцию напряжений в форме

$$\varphi=A\ln(r)+Br^2\ln(r)+Cr^2, \quad (11)$$

где произвольная постоянная D опущена, так как она берется для замкнутого кольца.

Краевые условия задачи следующие:

$$R_{r=0}=0, R_{r=8}=$$

$$=0, \int_a^b B_\beta dr=0, \int_a^b B_\beta r dr=M. \tag{12}$$

Раскрыв уравнение (12), получим

$$\left.\begin{aligned}\frac{A}{a^2}+B(1+2\ln(a))+2C=0,\\ \frac{A}{b^2}+B(1+2\ln(b))+2C=0,\\ A\ln\left(\frac{b}{a}\right)+B(b^2\ln(b)-a^2\ln(a))+C(b^2-a^2)=M,\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

где третье условие системы (13) удовлетворяется при наличии двух первых.

Решая (13), находим произвольные постоянные A, B, C:

$$A=-\frac{4M}{N}a^2b^2\ln\left(\frac{b}{a}\right),$$

$$B=-\frac{2M}{N}(b^2-a^2),$$

$$C=\frac{M}{N}(b^2-a^2+2(b^2\ln(b)-a^2\ln(a))),$$

где $N=(b^2-a^2)-4a^2b^2\ln^2\left(\frac{b}{a}\right)$.

Тогда напряжения составят

$$\left.\begin{aligned}R_r&=-\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+b^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+a^2\ln\left(\frac{a}{r}\right)\right),\\ B_\beta&=-\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\left(\frac{b}{a}\right)+b^2\ln\left(\frac{r}{b}\right)+a^2\ln\left(\frac{a}{r}\right)+b^2+a^2\right).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Приближенное решение уравнений (14) с использованием методов решения сопротивления материалов показало, что напряжения B_β изменяются по гиперболическому закону и хорошо согласуются с более точным решением при сравнении с экспериментальными данными.

Для определения перемещений воспользуемся физическими уравнениями по нахождению составляющих тензора деформаций

$$\left.\begin{aligned} e_{rr} &= \frac{1}{r}(R_r - \sigma B_\beta), \\ e_{\beta\beta} &= \frac{1}{r}(B_\beta - \sigma R_r), \\ e_{r\beta} &= \frac{2(1+\sigma)}{E} R_\beta, \end{aligned}\right\} \qquad (15)$$

после интегрирования которых будем иметь

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U_r}{\partial r} &= \frac{1}{E}\left(\frac{1+\sigma}{r^2}A + \left(2(1-\sigma)\ln(r) + 1 - 3\sigma\right)B + 2(1-\sigma)C\right), \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U_\beta}{\partial \beta} + \frac{U_r}{r} &= \frac{1}{E}\left(-\frac{1+\sigma}{r^2}A + \left(2(1-\sigma)\ln(r) + 3 - \sigma\right)B + 2(1-\sigma)C\right), \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \beta} + \frac{\partial U_\beta}{\partial r} - \frac{U_\beta}{r} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Последовательно проинтегрируем первое и второе уравнения (16):

$$\left.\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{E}\left(-\frac{1+\sigma}{r^2}A + \left(2(1-\sigma)\ln(r) - 1 - \sigma\right)rB + 2(1-\sigma)rC\right) + f_1(\beta), \\ U_\beta &= \frac{4\ B}{E} r\beta - f_1(\beta) + f_2(r). \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Найденные значения перемещений уравнения (17) подставим в третье уравнение системы (16) и получим два уравнения

$$f_2'(r) - \frac{1}{r} f_2(r) = 0; f_1''(\beta) + f_1(\beta) = 0,$$

откуда

$$f_1(\beta) = b\sin(\beta) - a\cos(\beta), f_2(r) = cr.$$

Окончательно запишем

$$\left.\begin{aligned} U_r &= \frac{1}{E}\left(-\frac{1+\sigma}{r^2}A + \left(2(1-\sigma)\ln(r) - 1 - \sigma\right)rB + 2(1-\sigma)rC\right) + a\sin(\beta) + b\cos(\beta), \\ U_\beta &= \frac{4B}{E} r\beta + a\cos(\beta) - b\sin(\beta) + cr. \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

При определении произвольных постоянных a, b, c необходимо закрепить дугообразный компенсатор таким образом, чтобы исключить его движение как твердого тела и принять в точке O_1:

$$U_r = U_\beta = \frac{\partial U_\beta}{\partial r} = 0.$$

При этом перемещение U_β включает две составляющие: перемещение и поворот прутка компенсатора на угол 4B/EB относительно центра как твердого тела, то есть при чистом изгибе поперечные сечения остаются плоскими согласно гипотезе Бернулли.

ВЫВОДЫ

Таким образом, внутренние силы упругости, возникающие в компенсаторе под действием внешних технологических нагрузок от натяжения трикотажной пряжи в процессе петлеобразования, определяют деформации с характерными напряжениями и перемещениями, фиксация и регулирование которых по показаниям нескольких датчиков являются определяющими факторами управления стабильностью технологического процесса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В.В.* Теория упругости. – М.: Судпромгиз, 1958.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 01.09.01.