УДК 519.717:681.3

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ОЦЕНКА МОДЕЛЕЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЧИСЛЕННОМ ЭКСПЕРИМЕНТЕ

В.В. ПЕКУНОВ, Ф.Н. ЯСИНСКИЙ

(Ивановский государственный энергетический университет)

При математическом моделировании многих аэрогидродинамических процессов, протекающих в природе и технических устройствах, нельзя не учитывать фактор турбулентности. Однако общепризнанной теории турбулентного движения до сих пор не существует, что объясняется сложностью самих турбулентных процессов.

Нами в численном эксперименте по моделированию турбулентного смешения затопленной плоской незакрученной струи проанализировано поведение различных моделей турбулентности. Сравнение результатов моделирования с известными аналитическими решениями и опытными данными позволит определить модели турбулентности, которые при использовании в численном эксперименте наиболее адекватно описывают реальные процессы.

Струйное течение, вытекающее с начальной U_0 скоростью из сопла (щели) с полувысотой R, может быть разбито на начальный и основной участки, а также переходную зону. Начальный участок содержит невозмущенное ядро, окруженное зоной смешения. Скорость в невозмущенном ядре равна начальной.

Рассмотрим начальный участок [1, 2]. Пусть ось Ox_1 совпадает с линией, продолжающей кромку сопла, а ось Ox_2 направлена от кромки к оси симметрии струи. Введем переменную $\xi = \dfrac{x_2}{x_1\sqrt[3]{2c^2}}$,

где $c = c_2 k_1$, причем $c_2 = 0{,}077$ есть константа, входящая в выражение для пути смешения l по теории Л. Прандтля ($l = c_2 b$), а $k_1 = 0{,}27$ – коэффициент интенсивности нарастания характерной толщины зоны смешения $b = k_1 x_1$.

Запишем решение Толмиена для продольной скорости U_1:

$$U_1 = U_0 \frac{\partial F}{\partial \xi}, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \xi}=\begin{cases}1 \text{ при } \xi \le \xi_1 \equiv 0{,}98,\\ 0{,}0176e^{-\xi}+e^{\frac{\xi}{2}}\left(0{,}662\cos\left(\xi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+0{,}228\sin\left(\xi\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) \text{ при } \xi_2 \le \xi \le \xi_1,\\ 0 \text{ при } \xi \ge \xi_2 \equiv -2{,}04.\end{cases} \tag{2}$$

В основном участке, к которому для простоты отнесем и переходную зону, ось Ox_1 совпадает с осью симметрии струи, а ось Ox_2 направлена от оси симметрии.

Воспользуемся приближенными формулами из [1]:

$$U_1 = U_m e^{-\left(\frac{x_2}{0{,}11x_1}\right)^2 \ln 2},$$

$$U_m = U_0\sqrt{\frac{11R}{0{,}9x_1}}, \tag{3}$$

где U_m – осевая скорость.

Отметим, что решение Толмиена (1) и (2) при $c = c_2k_1$ недостаточно хорошо состыкуется с (3). Длина L начального участка, определяемая из условия $\xi_1 = \frac{R}{L\sqrt[3]{2c^2}}$, равна 10, 64R. Тогда $U_m\big|_{x_1=L}$ превышает U_0, что не соответствует действительности. Чтобы уменьшить влияние подобных несоответствий, начальный и основной участки будем рассматривать отдельно.

Для численного моделирования использовали уравнение Навье – Стокса для продольной скорости, записанное с использованием эффективной вязкости $\nu_{эфф} = \nu_{мол} + \nu_{турб}$, где $\nu_{мол}$ – молекулярная вязкость, а $\nu_{турб}$ – турбулентная вязкость.

Применяли следующие модели турбулентности

1. Модель Прандтля:

$$\nu_{турб} = l^2\left|\frac{\partial U}{\partial y}\right|, \tag{4}$$

$$l = cx_1, \tag{5}$$

где y – нормаль к вектору U.

2. Модель Кармана, включающая уравнение (4) и

$$l = 0{,}4\left|\frac{\partial U}{\partial y}\Big/\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\right|. \tag{6}$$

3. Модель К-Е:

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}U_i\frac{\partial K}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_{эфф}}{\sigma_к}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)+G_к-E,$$

$$\frac{\partial E}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}U_i\frac{\partial E}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\nu_{эфф}}{\sigma_к}\frac{\partial E}{\partial x_i}\right)+\frac{E}{K}(c_1G_к-c_2E),$$

$$\nu_{турб}=c_\mu\frac{K^2}{E},$$

$$G_к=\nu_{эфф}\left\{2\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_i}\right)^2+\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_2}+\frac{\partial U_2}{\partial x_1}\right)^2\right\},$$

где $\sigma_К = 1{,}0$; $\sigma_E = 1{,}3$; $c_1 = 1{,}44$; $c_2 = 1{,}92$; $c_\mu = 0{,}09$.

4. Модель Абрамовича-Секундова:

$$\frac{\partial \nu_{турб}}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}U_i\frac{\partial \nu_{турб}}{\partial x_i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left((\nu_{мол}+\kappa\nu_{турб})\frac{\partial \nu_{турб}}{\partial x_i}\right)+$$
$$+\nu_{турб}f\left(\frac{\nu_{турб}}{8\nu_{мол}}\right)D-\gamma S,$$

$$S=\frac{\nu_{турб}(\nu_{мол}+\beta\nu_{турб})}{L^2_{min}},$$

$$D=\sqrt{\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right)},$$

$$f(z)=0{,}2\frac{z^2+1{,}47z+0{,}2}{z^2-1{,}47z+1},$$

где к=2,0; γ=50,0; β=0,06; L_{min} – кратчайшее расстояние до твердой стенки.

5. Модель Риварда (Лос-Аламос):

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\sum_{i=1}^{2}U_i\frac{\partial K}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\nu_{эфф}\frac{\partial K}{\partial x_i}\right)+$$
$$+2\nu_{турб}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i}^{2}e_{ij}^2-\nu_{мол}\frac{K}{l^2}\xi,$$

$$e_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j}+\frac{\partial U_j}{\partial x_i}\right),$$

$$Re_{турб}=\frac{l\sqrt{2K}}{\nu_{мол}},$$

$$\xi=\begin{cases}10 \text{ при } Re_{турб}<5,\\ 2Re_{турб} \text{ при } Re_{турб}\ge 5,\end{cases}$$

$$\nu_{турб}=\begin{cases}0{,}08l^2K/\nu_{мол} \text{ при } Re_{турб}<5,\\ 0{,}02l\sqrt{2K} \text{ при } Re_{турб}\ge 5,\end{cases}$$

где масштаб турбулентности l вычислялся по формулам (5) или (6).

Для интегрирования применяли метод расщепления по физическим параметрам [3]. Проводили две серии экспериментов с различными разностными схемами: с использованием и без использования аналитического разложения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\nu_{эфф}\frac{\partial H}{\partial x}\right)=\frac{\partial\nu_{эфф}}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial x}+\nu_{эфф}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2},$$

где H – интегрируемая функция.

Данные, полученные в результате экспериментов, сравнивали с образцовыми. Образцовые профили скорости рассчитывали по формулам (1...3), а образцовые данные для турбулентной вязкости – по теории Л. Прандтля (4) и (5) на основе образцовых профилей скорости. Во избежание влияния граничных условий при сравнении не учитывали слои приграничных узлов. Вычисляли относительные отклонения $\delta_{ij}=\dfrac{H_{ij}-H^o_{ij}}{\max\limits_{i,j}H^o_{ij}}$, где H^o_{ij} – образцовое значение сеточной функции в узле (i, j); H_{ij} – экспериментальное значение в том же узле. Подсчитывали следующие основные показатели: максимальное отклонение S; среднее отклонение M; среднеквадратичное отклонение D.

Показатели, вычисленные по результатам сравнения продольной скорости, сведены в табл. 1, а показатели, вычисленные по результатам сравнения турбулентной вязкости, – в табл. 2. Для экспериментов, выполненных без использования аналитического разложения, показатели для моделей Кармана и Риварда не приводятся, так как они практически не отличаются от аналогичных в табл. 1, 2.

Таблица 1

Модель	Невозмущенное ядро+зона смешения			Переходная зона+основной участок		
	S	M	D	S	M	D
Эксперименты, выполненные при использовании аналитического разложения						
К-Е	0,112	0,02	0,036	0,179	0,039	0,052
Прандтль	0,125	0,013	0,028	0,068	0,023	0,028
Абрамович-Секундов	0,122	0,03	0,046	0,132	0,05	0,058
Карман	0,337	0,08	0,117	0,37	0,09	0,113
Ривард (1 по Прандтлю)	0,494	0,037	0,109	0,513	0,173	0,239
Ривард (1 по Карману)	0,508	0,038	0,11	0,564	0,184	0,259
Эксперименты, выполненные без аналитического разложения						
К-Е	0,133	0,027	0,045	0,119	0,040	0,047
Прандтль	0,142	0,014	0,030	0,070	0,024	0,030
Абрамович-Секундов	0,146	0,037	0,053	0,145	0,067	0,074

Таблица 2

Модель	Невозмущенное ядро+зона смешения			Переходная зона+основной участок		
	S	M	D	S	M	D
Эксперименты, выполненные при использовании аналитического разложения						
К-Е	0,184	0,028	0,048	0,506	0,116	0,138
Прандтль	0,075	0,008	0,017	0,556	0, 1	0,143
Абрамович-Секундов	0,37	0,102	0,136	1,083	0,339	0,385
Карман	394	2,721	27,01	456,8	2,36	19,95
Ривард (1 по Прандтлю)	0,385	0,035	0,09	0,977	0,366	0,476
Ривард (1 по Карману)	0,387	0,035	0,09	0,977	0,368	0,477
Эксперименты, выполненные без аналитического разложения						
К-Е	0,204	0,044	0,07	0,605	0,135	0,164
Прандтль	0,080	0,008	0,018	0,472	0,095	0,13
Абрамович-Секундов	0,519	0,163	0,209	1,434	0,598	0,646

В табл. 3 представлены экспериментальные значения коэффициента интенсивности нарастания характерной ширины струи k_1 в основном участке.

Анализ данных, приведенных в табл. 1...3, позволяет сделать вывод о том, что для рассматриваемой задачи разностная схема с аналитическим разложением второй производной в целом показала несколько лучшие результаты, чем схема без разложения. Тем не менее, в двух случаях схема без аналитического разложения имела в основном участке лучшие показатели по продольной скорости для К-Е модели (табл. 1) и по турбулентной вязкости для модели Прандтля (табл. 2). Это свидетельствует о том, что для каждой модели все-таки необходим индивидуальный подбор разностной схемы.

Таблица 3

Модель	Экспериментальные значения коэффициента k_1	
	при использовании разложения	без использования разложения
К-Е	0,249	0,26
Прандтль	0,233	0,23
Абрамович-Секундов	0,275	0,287
Карман	0.27	-
Ривард (1 по Прандтлю)	0,069	-
Ривард (1 по Карману)	0,052	-

Рассмотрим результаты по отдельным моделям турбулентности. Результаты экспериментов с моделью Риварда должны быть признаны неудовлетворительными, так как картина распределения продольной скорости (табл. 3) скорее напоминает картину, возникающую при распространении ламинарной струи ($b=0,05\div0,07x$), то есть генерируемая турбулентная вязкость оказалась слишком мала. Результаты сравнений с образцовым решением (табл. 1) подтверждают непригодность модели Риварда для данной задачи, так как максимальная погрешность составляет около 50% для скорости. Возможно, данная модель предназначена для каких-либо специфических задач.

В экспериментах с моделью Кармана стационарного состояния достичь не удалось, что, очевидно, объясняется природой данной модели. В ходе экспериментов постоянно возникали точечные области, в которых турбулентная вязкость резко повышалась (наверное, в этих местах были так называемые точки перегиба), что приводило к пульсации скорости в данном месте. Влияние таких точек хорошо заметно в табл. 2 – максимальная погрешность для турбулентной вязкости очень велика. Максимальная погрешность для скорости достаточно велика (33...37%), но значительно меньше, чем в модели Риварда. Экспериментальное значение коэффициента интенсивности нарастания толщины струи k_1 = 0,27 ненамного отличается от известного полуэмпирического значения k_1 = 0,22 [1]. Можно предположить, что соотношение Кармана для пути смешения скорее пригодно для решения нестационарных задач.

Наилучшие результаты показаны при использовании модели Прандтля, которая, видимо, наиболее пригодна для описания данной и ряда других, сравнительно простых, задач. Однако данная модель, как и модель Кармана, абсолютно не учитывает ни предысторию потока, ни конвективный или диффузионный перенос турбулентных пульсаций. Это не позволяет использовать данную модель в более сложных случаях, например, при моделировании нестационарных турбулентных течений в областях сложной формы.

В связи с вышеизложенным следует отдать приоритет моделям Абрамовича-Секундова и К-Е, учитывающим вышеуказанные эффекты и показавшим по всем параметрам достаточно хорошие результаты. Отметим, что К-Е модель оказалась более точной (хотя здесь необходимы дополнительные исследования, например, анализ поведения данных моделей в пристеночных областях).

ВЫВОДЫ

На основании анализа результатов численных экспериментов с различными моделями турбулентности установлено, что наибольшей достоверностью среди рассмотренных обладают модели К-Е и Абрамовича-Секундова.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Абрамович Г.Н. и др.* Турбулентное смешение газовых струй. – М.: Наука, 1974.

2. *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1978.

3. *Годунов С.К., Рябенький В.С.* Разностные схемы.– М.: Наука, 1973.

Рекомендована кафедрой прикладной математики и информационных технологий ИГТА.

Поступила 03.07.01.