

УДК 677.057

DOI 10.47367/0021-3497\_2022\_1\_242

**МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ ТРЕНИЯ  
В ДВУХВАЛКОВОМ МОДУЛЕ**

**MATHEMATICAL MODELING OF FRICTION STRESSES  
IN A TWO ROLL MODULE**

*Ш.Р. ХУРРАМОВ, Г.А. БАХАДИРОВ, А. АБДУКАРИМОВ*

*SH.R. KHURRAMOV, G.A. BAKHADIROV, A. ABDUKARIMOV*

(Ташкентский архитектурно-строительный институт, Республика Узбекистан,  
Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева АН Республики Узбекистан)

(Tashkent Institute of Architecture and Civil Engineering, Republic of Uzbekistan,  
Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T. Urazbaev  
of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan)

E-mail: shavkat-xurramov59@mail.ru

*В статье приведены результаты теоретического исследования напряженного состояния в двухвалковом модуле. Разработаны математические модели напряжений трения в двухвалковом модуле, связывающие касательные и нормальные напряжения, распределенные по кривым контакта валков.*

*The article presents the results of a theoretical study of the stress state in a two-roll module. Mathematical models of friction stresses in a two-roll module are developed that relate tangential and normal stresses distributed along the roll contact curves.*

**Ключевые слова:** двухвалковые модули, напряжения трения, математические модели, кривые контакта, касательные и нормальные напряжения.

**Keywords:** two-roll modules, friction stresses, mathematical models, contact curves, shear and normal stresses.

Центральной задачей теории контактного взаимодействия двухвалковых модулей является аналитическое описание закономерностей распределения нормальных и касательных контактных напряжений.

В определении закономерностей распределения контактных напряжений основными факторами являются модели напряжений трения, связывающие касательные и нормальные напряжения, распределенные

по кривым контакта валков [1]. Существует достаточно много математических моделей напряжений трения, полученных теоретическими, экспериментальными или экспериментально-теоретическими методами [2...4]. Из существующих моделей напряжений трения наибольшее распространение получила модель Амонтона [2], [3]. Однако модель Амонтона не имеет достаточного физического обоснования, экспериментально не подтверждена и, естественно, законом не является. Ее можно рассматривать как допущение, используемое только для зон скольжения [1]. А также корректная модель напряжений трения для зоны прилипания в двухвалковых модулях пока не создана. Поэтому модели напряжений трения, используемые в настоящее время в теории контактного взаимодействия двухвалковых модулей, считаются приближенными [1]. По этой причине полученные с использованием их теоретические кривые распределения контактных напряжений рассматриваются как приближенные. Следовательно, они не соответствуют экспериментальным эпюрам и не обеспечивают высокую точность прогнозирования параметров контактного взаимодействия в двухвалковых модулях.

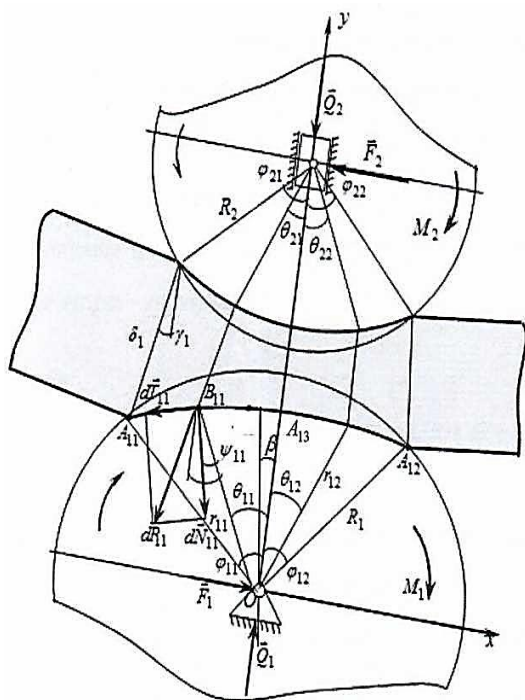


Рис. 1

Целью работы является моделирование напряжений трения в асимметричном двухвалковом модуле. В этом двухвалковом модуле валки расположены относительно вертикали наклоном справа, имеют неравные диаметры и эластичные покрытия из материалов с различными жесткостями, слой материала имеет равномерную толщину и подан наклоном вниз относительно линии центров (рис. 1 – схема сил в двухвалковом модуле).

Анализируем сначала напряженное состояние в контактном взаимодействии слоя материала и нижнего валка, происходящее по кривой контакта  $A_{11}A_{12}$ .

Кривая контакта валка состоит из двух участков  $A_{11}A_{13}$  и  $A_{13}A_{12}$  (рис. 1). На участке  $A_{11}A_{13}$  происходит сжатие слоя материала и покрытия валка, а на участке  $A_{13}A_{12}$  – восстановление. Какая-либо точка  $B_{11}$  участка сжатия  $A_{11}A_{13}$  определяется полярными координатами  $r_{11}$  и  $\theta_{12}$ , а точка  $B_{12}$  участка восстановления  $A_{11}A_{12}$  –  $r_{12}$  и  $\theta_{11}$ .

Согласно рис. 1:

$$-\varphi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0, \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \varphi_{12}, \quad (1)$$

$\varphi_{11}$ ,  $\varphi_{12}$  – контактные углы захвата и выхода.

В установившемся процессе взаимодействия на валок действуют: сила давления прижимных устройств  $\vec{Q}_1$ , горизонтальная реакция опор валка  $\vec{F}_1$ , момент сил сопротивления  $M_1$ , элементарные силы нормального давления и трения, действующие по всей кривой контакта валка (рис. 1) [5].

Элементарные силы в зонах сжатия ( $N_{11}$ ,  $T_{11}$ ) и восстановления ( $N_{12}$ ,  $T_{12}$ ) представим отдельно. Тогда, рассматривая валок в равновесии под действием приложенных сил, получаем:

$$\begin{cases} \sum X = N_{1x} + T_{1x} + F_{1x} + Q_{1x} = 0, \\ \sum Y = N_{1y} + T_{1y} + F_{1y} + Q_{1y} = 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $N_{1x}$ ,  $N_{1y}$ ,  $T_{1x}$ ,  $T_{1y}$  – проекции главных нормальных и касательных сил на осях  $x$  и  $y$ , равные сумме проекций главных нормальных и касательных сил в зонах сжатия

(j = 1) и восстановления (j = 2):

$$N_{1x} = \sum_{j=1}^2 N_{1jx}, N_{1y} = \sum_{j=1}^2 N_{1jy}, \quad (3)$$

$$T_{1x} = \sum_{j=1}^2 T_{1jx}, T_{1y} = \sum_{j=1}^2 T_{1jy}.$$

Считаем

$$F_{1x} = \sum_{j=1}^2 F_{1jx}, F_{1y} = \sum_{j=1}^2 F_{1jy}, \quad (4)$$

$$Q_{1x} = \sum_{j=1}^2 Q_{1jx}, Q_{1y} = \sum_{j=1}^2 Q_{1jy}.$$

$$\begin{aligned} dN_{11x} &= dN_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11}), dN_{11y} = -dN_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11}), dT_{11x} = -dT_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11}), \\ dT_{11y} &= -dT_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11}), dF_{11x} = dF_{11}, dF_{11y} = 0, dQ_{11x} = 0, dQ_{11y} = dQ_{11y}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\psi_{11}$  – угол между силой  $dN_{11}$  и радиусом  $r_{11}$ .

С учетом этих выражений из системы (6) для зоны сжатия имеем:

$$\begin{cases} dT_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11}) - dN_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11}) = dF_{11}, \\ dT_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11}) + dN_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11}) = dQ_{11}. \end{cases} \quad (8)$$

или

$$\frac{dF_{11}}{dQ_{11}} = \frac{dT_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11}) - dN_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11})}{dT_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11}) + dN_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11})}. \quad (9)$$

Так как рассматриваем установившийся процесс, то можно считать

$$\frac{F_1}{Q_1} = C_1, \quad (10)$$

где  $C_1$  – постоянная величина.

Отсюда имеем:

$$d\left(\frac{F_1}{Q_1}\right) = \frac{Q_1 dF_1 - F_1 dQ_1}{Q_1^2} = 0$$

или

$$\frac{dF_1}{dQ_1} = C_1.$$

С учетом выражений (3) и (4) система уравнений (2) имеет вид:

$$\begin{cases} N_{1jx} + T_{1jx} + F_{1jx} + Q_{1jx} = 0, \\ N_{1jy} + T_{1jy} + F_{1jy} + Q_{1jy} = 0, \end{cases} \quad (5)$$

или

$$\begin{cases} dN_{1jx} + dT_{1jx} + dF_{1jx} + dQ_{1jx} = 0, \\ dN_{1jy} + dT_{1jy} + dF_{1jy} + dQ_{1jy} = 0. \end{cases} \quad (6)$$

Из схемы сил зоны сжатия (рис. 1) находим:

Считая

$$\frac{dF_{11}}{dQ_{11}} = C_{11}, \quad (11)$$

из равенства (9) получим

$$\frac{dT_{11}}{dN_{11}} = \frac{\sin(\theta_{11} - \psi_{11}) + C_{11} \cos(\theta_{11} - \psi_{11})}{\cos(\theta_{11} - \psi_{11}) - C_{11} \sin(\theta_{11} - \psi_{11})}. \quad (12)$$

Элементарные силы связаны с контактными напряжениями соотношениями [5]:

$$dN_{11} = n_{11} \sqrt{r_{11}^2 + r_{11}'^2} d\theta_{11}, \quad (13)$$

$$dT_{11} = t_{11} \sqrt{r_{11}^2 + r_{11}'^2} d\theta_{11},$$

где  $n_{11} = n_{11}(\theta_{11})$ ,  $t_{11} = t_{11}(\theta_{11})$  – соответственно, нормальные и касательные силы (напряжения), распределенные по зоны сжатия кривой контакта валков.

Подставляем выражения (13) в равенство (12), затем преобразуем согласно выражениям

$$\cos \psi_{11} = \frac{r_{11}}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{11}'^2}}, \quad \sin \psi_{11} = \frac{r_{11}'}{\sqrt{r_{11}^2 + r_{11}'^2}}$$

и получаем зависимости, связывающие касательные и нормальные напряжения в точ-

$$t_{11} = \frac{(\sin \theta_{11} + C_{11} \cos \theta_{11})r_{11} - (\cos \theta_{11} - C_{11} \sin \theta_{11})r'_{11}}{(\cos \theta_{11} - C_{11} \sin \theta_{11})r_{11} + (\cos \theta_{11} + C_{11} \cos \theta_{11})r'_{11}} n_{11}, \quad -\varphi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0, \quad (14)$$

Формулу, связывающую касательные и нормальные напряжения в точках зоны вос-

$$t_{12} = \frac{(\sin \theta_{12} + C_{12} \cos \theta_{12})r_{12} - (\cos \theta_{12} - C_{12} \sin \theta_{12})r'_{12}}{(\cos \theta_{12} - C_{12} \sin \theta_{12})r_{12} + (\cos \theta_{12} + C_{12} \cos \theta_{12})r'_{12}} n_{12}, \quad 0 \leq \theta_{12} \leq \varphi_{12}, \quad (15)$$

Заметим, что в точке кривой контакта, лежащей на линии центров, выполняются граничные условия  $t_{11}(0) = t_{12}(0)$ ,  $n_{11}(0) = n_{12}(0)$ ,  $r_{11}(0) = r_{12}(0) = R_{10}$ ,  $r'_{11}(0) = r'_{12}(0) = 0$ .

Эти условия приводят к равенству  $C_{11} = C_{12}$ . Тогда из выражения (10) и (11)

$$\begin{cases} t_{11} = \frac{(Q_1 \sin \theta_{11} + F_1 \cos \theta_{11})r_{11} - (Q_1 \cos \theta_{11} - F_1 \sin \theta_{11})r'_{11}}{(Q_1 \cos \theta_{11} - F_1 \sin \theta_{11})r_{11} + (Q_1 \cos \theta_{11} + F_1 \cos \theta_{11})r'_{11}} n_{11}, & -\varphi_{11} \leq \theta_{11} \leq 0, \\ t_{12} = \frac{(Q_1 \sin \theta_{12} + F_1 \cos \theta_{12})r_{12} - (Q_1 \cos \theta_{12} - F_1 \sin \theta_{12})r'_{12}}{(Q_1 \cos \theta_{12} - F_1 \sin \theta_{12})r_{12} + (Q_1 \cos \theta_{12} + F_1 \cos \theta_{12})r'_{12}} n_{12}, & 0 \leq \theta_{12} \leq \varphi_{12}. \end{cases} \quad (17)$$

В рассматриваемом двухвалковом модуле верхний вал – свободный. В этом случае действующие на верхний валок силы  $\vec{F}_2$  и  $\vec{T}_2$  меняют направление [5]. Поэтому в

$$\begin{cases} t_{21} = \frac{(Q_2 \sin \theta_{21} + F_2 \cos \theta_{21})r_{21} - (Q_2 \cos \theta_{21} - F_2 \sin \theta_{21})r'_{21}}{(Q_2 \cos \theta_{21} - F_2 \sin \theta_{21})r_{21} + (Q_2 \cos \theta_{21} + F_2 \cos \theta_{21})r'_{21}} n_{21}, & -\varphi_{21} \leq \theta_{21} \leq 0, \\ t_{22} = \frac{(Q_2 \sin \theta_{22} + F_2 \cos \theta_{22})r_{22} - (Q_2 \cos \theta_{22} - F_2 \sin \theta_{22})r'_{22}}{(Q_2 \cos \theta_{22} - F_2 \sin \theta_{22})r_{22} + (Q_2 \cos \theta_{22} + F_2 \cos \theta_{22})r'_{22}} n_{22}, & 0 \leq \theta_{22} \leq \varphi_{22}. \end{cases} \quad (18)$$

Системы уравнений (17) и (18) определяют модели напряжений трения в рассматриваемом двухвалковом модуле. Они устанавливают связь между силами, действующими на валки двухвалкового модуля с напряжениями, распределенными под воздействием этих сил. Анализ этих моделей показал, что они описывают модели напряжений всех частных случаев рассматриваемого двухвалкового модуля.

ках зоны сжатия нижнего валка:

становления нижнего валка, получим аналогично.

Она имеет вид:

$$C_1 = C_{11} = C_{12} = F_1/Q_1. \quad (16)$$

Следовательно, из уравнений (14) и (15) получим модель напряжений трения для нижнего приводного валка:

формулах системы (17) величины  $t_{2j}$  ( $j = 1, 2$ ) и  $F_2$  имеют обратные знаки. В связи с этим модель напряжений трения для верхнего валка имеет вид:

Преобразуем формулу (14) с учетом выражения  $\operatorname{tg} \psi_{11} = \frac{r'_{11}}{r_{11}}$  и  $C_{11} = C_1$ :

$$t_{11} = \frac{(\operatorname{tg} \theta_{11} + C_1) - (1 - C_1 \operatorname{tg} \theta_{11}) \operatorname{tg} \psi_{11}}{(1 - C_1 \operatorname{tg} \theta_{11}) + (\operatorname{tg} \theta_{11} + C_1) \operatorname{tg} \psi_{11}} n_{11}.$$

Полагая теперь  $C_1 = \text{tg}\xi_{11}$ , перейдем к выражению

$$t_{11} = \text{tg}(\theta_{11} - \psi_{11} + \xi_1)n_{11}. \quad (19)$$

Аналогично преобразуем модели напряжений трения  $t_{12}$ ,  $t_{21}$ ,  $t_{22}$ .

Обобщая их, имеем:

$$t_{ij} = \pm \text{tg}(\theta_{ij} - \psi_{ij} \pm \xi_i)n_{ij}, \quad (20)$$

где  $\psi_{ij} = \text{arctg} \frac{r'_{ij}}{r_{ij}}$ ,  $\xi_{ij} = \text{arctg} \frac{F_i}{Q_i}$ , здесь зна-

ки плюс относятся к приводному нижнему валку ( $i=1$ ), знаки минус относятся к свободному верхнему валку ( $i=2$ ).

Формулы (20) определяют модели напряжений трения валков в рассматриваемом двухвалковом модуле в упрощенном виде.

Разработанные математические модели напряжений трения валков устанавливают связь между нормальными и касательными напряжениями, распределенными по кривой контакта соответствующего валка, как в зонах скольжения, так и в зоне прилипания.

Из формулы (20) следует, что

$$f(\theta_{ij}) = \pm \text{tg}(\theta_{ij} - \psi_{ij} \pm \xi_i), \quad (21)$$

где  $f(\theta_{ij}) = \frac{t(\theta_{ij})}{n(\theta_{ij})}$ .

Если соотношение касательных и нормальных напряжений считаем как коэффициент трения, то  $f(\theta_{ij})$  определяемые формулами (21), означают, что коэффициенты трения двухвалковых модулей величины

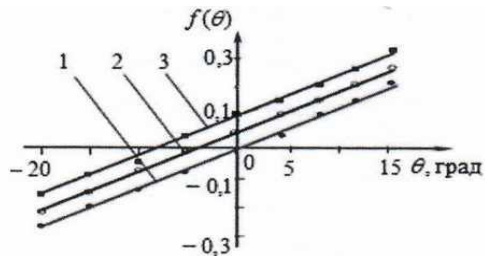


Рис. 3

Для наглядного представления о характере влияния податливости контактирующих тел и внешних сил на рис. 3 (измене-

переменные.

В формулах (21) углы  $\psi_{ij}$  определяют податливости покрытий валков и слоя материала. Они изменяются в пределах  $[0; \theta_{ij}]$ , то есть

$$0 \leq \psi_{ij} \leq \theta_{ij}. \quad (22)$$

Двум предельным положениям угла  $\psi_{ij}$  соответствуют два предельных расположения кривых контакта валков. Когда  $\psi_{ij} = 0$ , тогда покрытие валка не деформируется (рис. 2 – схема расположения угла  $\psi$ ). Поэтому кривые контакта будут частями окружностей с радиусами  $R_i$  и определяются уравнениями  $r_{ij} = R_i$ . Когда  $\psi_{ij} = \theta_{ij}$ , тогда слой материала не деформируется (рис. 2). В этом случае кривые контакта будут частями прямой, являющейся продолжением поверхностей слоя и определяются урав-

$$r_{ij} = \frac{R_i \cos \varphi_{ij}}{\cos \theta_{ij}}.$$

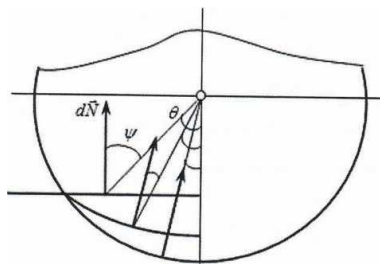


Рис. 2

Таким образом, можно считать  $\psi_{ij} = k_{ij}\theta_{ij}$ , где  $0 \leq k_{ij} \leq 1$ . Тогда из (21) имеем:

$$f(\theta_{ij}) = \pm \text{tg}((1-k_{ij})\theta_{ij} \pm \xi_i). \quad (23)$$

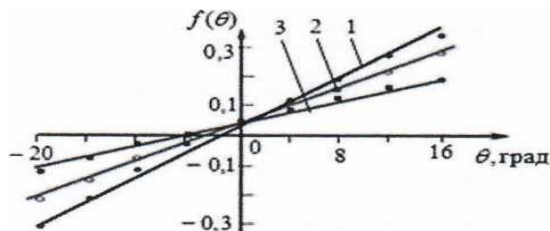


Рис. 4

ние коэффициента трения при различных  $\frac{F}{Q}$ , когда  $k = 0,25$ :  $1 - \frac{F}{Q} = 0$ ;  $2 - \frac{F}{Q} = 0,05$ ;

3 –  $\frac{F}{Q}=0,1$ ) и рис. 4 (изменение коэффициента трения при различных  $k$ , когда  $\frac{F}{Q} = 0,05$ : 1 –  $k = 0$ ; 2 –  $k = 0,25$ ; 3 –  $k = 0,5$ ) представлены изменения коэффициента трения при изменяющихся параметрах  $k$  и  $\frac{F}{Q}$ . В нейтральных точках  $f(\varphi_{i3}) = 0$  или  $(1-k_y)\varphi_{i3} \pm \xi_i = 0$ , где  $\varphi_{i3}$  – нейтральный угол  $i$ -валка. Отсюда имеем:

$$\varphi_{i3} = \pm \frac{\xi_i}{1-k_{ij}}. \quad (24)$$

Эти формулы определяют величины нейтральных углов в рассматриваемом двухвалковом модуле.

По формулам (24) выполнены расчеты нейтральных углов. Результаты расчетов показали, что с увеличением угла  $\xi_i$  угол  $\varphi_{i3}$  линейно увеличивается. Согласно выражению  $\xi_{ij} = \arctg \frac{F_i}{Q_i}$  увеличение  $\xi_i$  означает увеличение силы  $F_i$ . В связи с этим можно сказать, что чем больше силы  $F_i$ , тем левее от линии центров нейтральная точка.

## ВЫВОДЫ

1. Получены модели напряжений трения асимметричного двухвалкового модуля. Эти модели показывают, что между касательными и нормальными напряжениями, распределенными по кривым контакта валков, имеется нелинейная связь, на которую влияют форма кривых контакта валков, геометрические и силовые параметры двухвалкового модуля.

2. Выявлено, что коэффициенты трения в двухвалковом модуле изменяются в зависимости от коэффициента  $k$ , определяющего податливости контактирующих тел,

и коэффициента  $\frac{F}{Q}$ , определяющего внешние силы, действующие на валки, линейно.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Васильев Я.Д. Уточнение модели напряжений трения при прокатке// Известия вузов. Черная металлургия. – 2001, №5. С. 1...23.
2. Фомин Ю.Г. Разработка теоретических основ и средств повышения эффективности обработки тканей валковыми модулями отделочных машин: Дис. ...докт. техн. наук. – Иваново: ИГТА, 2001.
3. Alexa V, Ratiu S and Kiss.I. Metall Rolling-Asymmetrical rolling process// IOP Conference Series: Materials Shience and Engineering. – 106(2016)012019.
4. Кожевникова И.А. К вопросу о контактном трении при прокатке// Вестник Череповецкого государственного университета, технические науки. – 2011, №4 (3). С. 18...21.
5. Демидов А.В. Разработка и исследование валкового устройства для повышения эффективности отжима шерсти после промывки: Дис. ... канд. техн. наук. – Иваново: ИГТА, 2005.

## REFERENCES

1. Vasil'ev Ya.D. Utochnenie modeli napryazheniy treniya pri prokatke// Izvestiya vuzov. Chernaya metallurgiya. – 2001, №5. S. 1...23.
2. Fomin Yu.G. Razrabotka teoreticheskikh osnov i sredstv povysheniya effektivnosti obrabotki tkaney valkovymi modulyami otdelochnykh mashin: Dis. ...dokt. tekhn. nauk. – Ivanovo: IGTA, 2001.
3. Alexa V, Ratiu S and Kiss.I. Metall Rolling-Asymmetrical rolling process// IOP Conference Series: Materials Shience and Engineering. – 106(2016)012019.
4. Kozhevnikova I.A. K voprosu o kontaktnom trenii pri prokatke// Vestnik Cherepovetskogo gosudarstvennogo universiteta, tekhnicheskie nauki. – 2011, №4 (3). S. 18...21.
5. Demidov A.V. Razrabotka i issledovanie valkovogo ustroystva dlya povysheniya effektivnosti otzhima shersti posle promyvki: Dis. ... kand. tekhn. nauk. – Ivanovo: IGTA, 2005.

Рекомендована семинаром "Теории механизмов и машин" ИМСС им. М.Т. Уразбаева АН Республики Узбекистан. Поступила 09.09.21.