

УДК 539.434:677.494

DOI 10.47367/0021-3497_2022_4_185

**ВАРИАНТ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ
ЭКСПЛУАТАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ
ПОЛИМЕРНЫХ ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ***

**A VARIANT OF MATHEMATICAL MODELING
OF POLYMERIC TEXTILE MATERIALS OPERATING PROCESSES**

М.А. ЕГОРОВА, В.И. ВАГНЕР, Н.С. КЛИМОВА, А.М. ЛИТВИНОВ

M.A. EGOROVA, V.I. VAGNER, N.S. KLIMOVA, A.M. LITVINOV

(Санкт-Петербургский государственный университет промышленных технологий и дизайна)

(St. Petersburg State University of Industrial Technologies and Design)

E-mail: wagnerv@mail.ru; nsk-klimova@yandex.ru; litalmih@mail.ru

В статье рассматривается вариант математического моделирования эксплуатационных процессов полимерных текстильных материалов, на основе которого можно проводить прогнозирование указанных процессов этих материалов любой степени сложности – от процессов простой релаксации и простой ползучести до сложных деформационно-восстановительных процессов и процессов обратной релаксации с чередованием нагрузки и разгрузений.

The article considers a variant of mathematical modeling of polymeric textile materials operational processes, on the basis of which it is possible to predict the indicated processes of these materials of any degree and complexity - from simple relaxation and simple creep processes to complex deformation-recovery processes and reverse relaxation processes with alternating loading and unloading.

Ключевые слова: математическое моделирование, прогнозирование, деформационные режимы эксплуатации, полимерные текстильные материалы.

Keywords: mathematical modeling, forecasting, deformation modes of operation, polymeric textile materials.

* Работа финансировалась в рамках выполнения гранта Президента РФ № МК-5492.2022.4.

Известные подходы к анализу эксплуатационных процессов полимерных текстильных материалов, к которым, в основном, относятся деформационные процессы, основаны на описании обобщенных экспериментальных кривых релаксации и ползучести с помощью нормированных релаксационных функций и функций запаздывания, в качестве которых наиболее часто выбирается интегральная кривая нормального распределения по логарифмической шкале приведенного времени.

Ввиду различного комплексного состава и макростроения полимерных текстильных материалов исследование механических свойств некоторых из них, особенно многокомпонентных материалов, бывает затруднено наличием у них усложненного спектра времен релаксации и запаздывания ввиду наложения друг на друга элементарных спектров, соответствующих составляющим материал компонентам [1].

Это обстоятельство стимулировало поиск математических моделей деформационных процессов на основе новых релаксационных функций и функций запаздывания, соответствующих усложненным спектрам. При построении математической модели вязкоупругости учитывалось, как требование к минимальному числу параметров математической модели, так и их физическая обоснованность [2].

Упрощение математической модели вязкоупругости достигается за счет учета нелинейности в интегральных ядрах релаксации и запаздывания в виде задания функций среднестатистических времен релаксации и запаздывания.

Один из рассматриваемых вариантов математического моделирования деформационных процессов полимерных текстильных материалов построен на основе вероятностного распределения Коши релаксирующих и запаздывающих частиц [3]:

$$E_{\varepsilon t} = E_0 - (E_0 - E_\infty) \varphi_{\varepsilon t}, \quad (1)$$

$$D_{\sigma t} = D_0 + (D_\infty - D_0) \varphi_{\sigma t}, \quad (2)$$

$$- E_0 = \lim_{t \rightarrow 0} E_{\varepsilon t}, E_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} E_{\varepsilon t}, D_0 = \lim_{t \rightarrow 0} D_{\sigma t}, D_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} D_{\sigma t}$$

$$\varphi_{\varepsilon t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{b_{n\varepsilon}} \ln \frac{t}{\tau_\varepsilon} \right), \quad (3)$$

$$\varphi_{\sigma t} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{b_{n\sigma}} \ln \frac{t}{\tau_\sigma} \right), \quad (4)$$

где $E_{\varepsilon t}$ – модуль релаксации; $D_{\sigma t}$ – податливость, t – время; $1/b_{n\varepsilon}$ – параметр интенсивности процесса релаксации; $1/b_{n\sigma}$ – параметр интенсивности процесса ползучести; τ_ε – время релаксации (время за которое проходит половина процесса релаксации при величине деформации); τ_σ – время запаздывания (время, за которое проходит половина процесса ползучести при величине напряжения); $E_{\varepsilon t} = \sigma/\varepsilon$ – модуль релаксации; E_0 – модуль упругости; E_∞ – модуль вязкоупругости; $D_{\sigma t} = \varepsilon/\sigma$ – податливость; D_0 – начальная податливость; D_∞ – предельная равновесная податливость; ε – деформация; σ – напряжение; $\varphi_{\varepsilon t}$ – функция релаксации и $\varphi_{\sigma t}$ – функция ползучести, заданные в виде нормированного арктангенса логарифма приведенного времени (НАЛ).

Предложенный вариант наиболее подходит для прогнозирования деформационных процессов полимерных текстильных материалов сложного макростроения, так как известно, что сумма случайных величин, распределенных по нормированному закону Коши, также распределена по этому же закону. То есть, если предположить, что релаксирующие и запаздывающие частицы, составляющих текстильных материалов нитей, распределены по внутренним временам релаксации и запаздывания по закону Коши, то можно считать, что и макро релаксирующие и макро запаздывающие частицы распределены по этому закону [4].

Несомненным достоинством математической модели (1)...(4) является то, что она содержит минимальное число параметров, имеющих ясный физический смысл:

- асимптотические значения модуля релаксации и податливости;

- структурные параметры $b_{n\varepsilon}$ и $b_{n\sigma}$ характеризуют скорость процессов релаксации и ползучести – указанные параметры соответствуют логарифму приведенного времени "полурелаксации" (половина процесса релаксации при деформации ε происходит в интервале времени $t \in [t', t'']$, где $\ln(t'/\tau_\varepsilon) = -b_{n\varepsilon}$, $\ln(t''/\tau_\varepsilon) = b_{n\varepsilon}$) и "полузапаздывания" (половина процесса ползучести при напряжении σ происходит в интервале времени $t \in [t', t'']$, где $\ln(t'/\tau_\sigma) = -b_{n\sigma}$, $\ln(t''/\tau_\sigma) = b_{n\sigma}$));

- функции времен релаксации $f_{\varepsilon, \varepsilon} = \ln(t_1/\tau_\varepsilon)$ и времен запаздывания $f_{\sigma, \sigma} = \ln(t_1/\tau_\sigma)$, характеризующие сдвиги кривых "семейств" релаксации и ползучести вдоль логарифмическо-временной шкалы содержатся, соответственно, в структурно-деформационно-временном аргументе-функционале [5]:

$$W_{\varepsilon t} = \frac{1}{b_{n\varepsilon}} \ln \frac{t}{\tau_\varepsilon} = \frac{1}{b_{n\varepsilon}} \left(\ln \left(\frac{t}{t_1} \right) + \ln \left(\frac{t_1}{\tau_\varepsilon} \right) \right) \quad (5)$$

и в структурно-сило-временном аргументе-функционале

$$W_{\sigma t} = \frac{1}{b_{n\sigma}} \ln \frac{t}{\tau_\sigma} = \frac{1}{b_{n\sigma}} \left(\ln \left(\frac{t}{t_1} \right) + \ln \left(\frac{t_1}{\tau_\sigma} \right) \right). \quad (6)$$

Относительно медленная сходимость функции НАЛ (например, по сравнению с интегралом вероятности) к своим асимптотическим значениям позволяет интерполировать модуль релаксации $E_{\varepsilon t}$ и податливость $D_{\sigma t}$ в достаточно широком временном диапазоне, что дает возможность прогнозирования как быстротекущих, так и длительных деформационных процессов.

Следует заметить, что выбор нормированной функции для математической модели вязкоупругих свойств полимерных материалов осложняется тем, что нельзя

априорно отдать предпочтение какой-то из них. Основным критерием для отбора служит эксперимент. Наличие нескольких нормированных функций для моделирования позволяет сделать более правильный выбор и тем самым повысить надежность прогнозирования [6].

Исследование вязкоупругих характеристик полимерных текстильных нитей на основе предложенной математической модели (1)...(4) показало, что расчетное значение модуля упругости E_0 выше, чем рассчитанное с применением математических моделей, основанных на других нормированных функциях, и близко к акустическому значению $E_{ак}$, что также физически обосновано, так как скорость распространения упругих взаимодействий в полимерных текстильных нитях близка к звуковой. Изменилось в сторону уменьшения и значение модуля вязкоупругости E_∞ , характеризующего нижнюю асимптоту модуля релаксации в длительных процессах, что, по сути, расширяет диапазон релаксации. Аналогичный вывод можно сделать и о процессе ползучести. Данное обстоятельство выгодно отличает функцию НАЛ от ранее применявшихся нормированных функций релаксации и запаздывания (например, интеграла вероятности, функции Кольрауша, гиперболического тангенса и др.) [7].

Таким образом, использование нормированной функции НАЛ в качестве основы математической модели вязкоупругости позволяет с достаточной степенью точности моделировать деформационные свойства полимерных текстильных нитей. Указанное моделирование расширяет деформационно-временные и сило-временные границы прогнозирования деформационных процессов. Аналитическое задание функции НАЛ и принадлежность ее к классу элементарных функций упрощает дифференциально-интегральные преобразования в рамках рассматриваемой математической модели и облегчает процесс нахождения вязкоупругих характеристик [8].

Для математического моделирования релаксации и ползучести могут применяться и другие нормированные функции $\varphi_{\varepsilon t}$ и $\varphi_{\sigma t}$. Большое разнообразие применя-

ющихся функций положительно сказывается на точности прогнозирования. Критерием подбора функции является степень отклонения расчетных значений по математическим моделям (1)...(6) от эксперимента.

Кривые "семейства" релаксации, полученные при разных значениях деформации, можно параллельным сдвигом вдоль логарифмическо-временной шкалы на величину $\ln(\tau_\varepsilon/t_1)$:

$$\ln \frac{t}{\tau_\varepsilon} = \ln \frac{t}{t_1} - \ln \frac{\tau_\varepsilon}{t_1} \quad (7)$$

наложить на обобщенную кривую модуля релаксации $E_{\varepsilon t}$, аппроксимированного математической моделью (1). Данное преобразование "семейства" релаксации основано на, так называемой, деформационно-временной аналогии.

По величине указанных сдвигов определяется функция $\ln(\tau_\varepsilon/t_1)$, задающая, по сути, времена релаксации τ_ε . Структурный параметр интенсивности процесса релаксации $1/b_\varepsilon$ определяется как коэффициент подобия обобщенной кривой модуля релаксации и нормированной функции (3).

Расположение обобщенной кривой модуля релаксации $E_{\varepsilon t}$ позволяет определить асимптотические значения E_0 и E_∞ .

Таким образом, задание математической модели релаксации (1) позволяет по экспериментальному "семейству" релаксации определить основные характеристики процесса релаксации, которые в дальнейшем используются для прогнозирования деформационных процессов.

Аналогично по экспериментальному "семейству" ползучести определяются параметры процесса ползучести: асимптотические значения D_0 и D_∞ , параметр интенсивности процесса $1/b_\sigma$ и функция времен запаздывания $\ln(\tau_\sigma/t_1)$ [9].

Достоверность определения рассмотренных механических характеристик проверяется контрольным пересчетом модуля релаксации и податливости по формулам (1), (2) и сопоставлением полученных зна-

чений с экспериментальными данными.

На основе вычисленных механических характеристик полимеров проводится прогнозирование деформационных процессов. Для этого используются численные методами решения интегральных уравнений Больцмана-Вольтерра наследственного типа [10]:

$$\sigma_t = E_0 \varepsilon_t - (E_0 - E_\infty) \int_0^t \varepsilon_{t-s} \frac{\partial \varphi_{\varepsilon s}}{\partial s} ds \quad (8)$$

для процесса сложной релаксации и

$$\varepsilon_t = D_0 \sigma_t + (D_\infty - D_0) \int_0^t \sigma_{t-s} \frac{\partial \varphi_{\sigma s}}{\partial s} ds \quad (9)$$

для процесса сложной ползучести с интегральными ядрами релаксации и запаздывания, соответствующими математической модели (1)...(6):

$$\varphi'_{\varepsilon t} = \frac{\partial \varphi_{\varepsilon t}}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{b_{n\varepsilon}} \frac{1}{1 + W_{\varepsilon t}^2} \frac{1}{t} \quad (10)$$

$$\varphi'_{\sigma t} = \frac{\partial \varphi_{\sigma t}}{\partial t} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{b_{n\sigma}} \frac{1}{1 + W_{\sigma t}^2} \frac{1}{t} \quad (11)$$

Уравнения (8), (9) являются определяющими уравнениями нелинейно-наследственной релаксации и ползучести. Нелинейность этих уравнений состоит, прежде всего в учете среднестатистических времен релаксации τ_ε и ползучести τ_σ , входящих явно в интегральные ядра релаксации $\frac{\partial \varphi_{\varepsilon s}}{\partial s}$

и ползучести $\frac{\partial \varphi_{\sigma s}}{\partial s}$.

Интегралы, стоящие в правых частях уравнений (8), (9), представляют собой свертки функции деформации ε или напряжения σ с соответствующими интегральными ядрами, что отражает учет наследственного характера процессов деформирования. Данное обстоятельство означает, что при численном интегрировании уравнений (8), (9) по обратной временной шкале s необходимо учитывать вклады деформации или напряжения, накопленных к данному моменту времени $t-s$.

Преимущество применения для моделирования деформационных процессов интегральных ядер (10), (11), как следствие математической модели (1)...(6), состоит в возможности расширения области доверительного прогнозирования в сторону "больших" (длительные процессы) и в сторону "малых" времен (кратковременные процессы) с уменьшением погрешности прогноза за счет снижения влияния квазимгновенного фактора деформирования в начале процесса [11].

Кроме того, повышение точности прогнозирования основано на разработанных методах вычисления несобственных нелинейно-наследственных интегралов (8), (9), построенных на неравномерном разбиении временной шкалы с учетом специфики рассматриваемого процесса.

Прогнозирование деформационных процессов играет важную роль при исследовании эксплуатационных свойств полимерных материалов, применяемых в различных отраслях промышленности. Среди деформационных процессов наиболее часто встречаются деформационно-восстановительные процессы, а также процессы прямой и обратной релаксации [12].

Деформационно-восстановительный процесс характеризуется заданием функции напряжения σ_t и является частным случаем процесса нелинейно-наследственной ползучести, описываемой уравнением (8). Как правило, функция напряжения σ_t задается в ступенчатом виде с чередованием нагрузки и разгрузки. Уравнение (9) позволяет также прогнозировать процессы ползучести с произвольным заданием напряжения. Процессы прямой и обратной релаксации характеризуются заданием функции деформации ε_t и являются частным случаем процесса нелинейно-наследственной релаксации, описываемой уравнением (8) [13].

Проверка работоспособности моделей прогнозирования деформационных процессов (8), (9) с учетом (1)...(6) проводится, как правило, на простейших процессах растяжения с постоянной скоростью деформирования $\dot{\varepsilon}$ посредством построения экспериментальных диаграмм растяжения. По степени совпадения расчетных значений диа-

граммы с экспериментальными данными делается вывод о применимости указанной математической модели. Сравнение расчетных значений деформации и напряжения, вычисленных по уравнениям (8), (9), с экспериментальными данными для более сложных деформационных процессов повышает степень надежности прогнозирования [14].

ВЫВОДЫ

Подводя итог рассмотренным методам исследования механических свойств полимеров, включающих в себя построение математической модели вязкоупругости полимерных материалов, методики определения их механических характеристик, методики прогнозирования деформационных свойств указанных материалов, программное обеспечение и др., отметим, что немаловажную роль играет удачный выбор математической модели.

Если деформационные процессы одной группы полимерных материалов точнее прогнозируются с использованием некоторой математической модели, то для другой группы материалов может оказаться предпочтительнее применение другой математической модели. Поэтому, чем шире набор предлагаемых математических моделей и соответствующих им методик, тем точнее могут быть определены механические характеристики полимеров и тем точнее будет прогноз деформационных процессов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Переборова Н.В.* Критерии качественной оценки релаксационно-восстановительных свойств полимерных текстильных материалов технического назначения//Химические волокна. – 2020, № 3. С.39..42.
2. *Переборова Н.В.* Критерии качественной оценки деформационно-функциональных свойств полимерных текстильных материалов технического назначения//Химические волокна. – 2020, № 4. С.37..40.
3. *Переборова Н.В.* Критерии качественной оценки релаксационных процессов полимерных текстильных материалов с целью оценки их эксплуатационных свойств// Вестник Санкт-Петербургского

государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2020, № 1. С. 80...88.

4. *Переборова Н.В., Сердюк С.С., Кузьмин С.Д., Смирнов Г.А.* Методы системного анализа при исследовании вязкоупругих свойств текстильных материалов // Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2017, № 1. С. 16...26.

5. *Переборова Н.В., Егорова М.А., Шванкин А.М.* Методология математического моделирования деформационных процессов полимерных текстильных материалов//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2017. Т. 29, № 1. С. 20...28.

6. *Переборова Н.В., Ананичев Е.А., Антонова И.А., Коробовцева А.А., Федорова С.В.* Методология моделирования и компьютерного прогнозирования деформационно-эксплуатационных свойств полимерных текстильных материалов// Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2019, № 1. С.136...145.

7. *Переборова Н.В., Ананичев Е.А., Антонова И.А., Коробовцева А.А.* Вариант прогнозирования усадки и восстановления арамидных текстильных материалов//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2019, № 1. С. 87...97.

8. *Переборова Н.В., Абрамова И.В., Ананичев Е.А., Антонова И.А., Коробовцева А.А.* Варианты моделирования деформационно-эксплуатационных свойств полимерных волокнистых материалов сложного строения//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2019, № 1. С. 98...107.

9. *Переборова Н.В., Егорова М.А., Каланчук О.Э., Федорова С.В.* Математическое моделирование и компьютерное прогнозирование вязкоупругой ползучести геотекстильных нетканых материалов//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2019, № 4. С.51...58.

10. *Переборова Н.В., Шванкин А.М., Ковтун М.А.* Прогнозирование сложных деформационных процессов полимерных материалов, используемых для производства обуви//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2017. Т. 29, № 1. С. 38...46.

11. *Переборова Н.В.* Методология компьютерного моделирования деформационно-релаксационных процессов полимерных текстильных материалов//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2017. Т. 30, №2. С. 33...42.

12. *Переборова Н.В., Максимова Н.А.* Логистическая модель процесса организации склада готовых

изделий текстильной и легкой промышленности//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2017. Т. 32, №4. С. 114...117.

13. *Переборова Н.В.* Повышение конкурентоспособности арамидных текстильных материалов на основе качественного анализа их эксплуатационно-деформационных свойств//Вестник Санкт-Петербургского государственного университета технологии и дизайна. Серия 1. Естественные и технические науки. – 2017. Т. 32, № 4. С. 123...132.

14. *Переборова Н.В., Максимова Н.А., Чистякова Е.С.* Вариант логистической модели склада изделий текстильной и легкой промышленности// Изв. вузов. Технология легкой промышленности. – 2018, № 1. С. 115...118.

REFERENCES

1. Pereborova N.V. Criteria for a qualitative assessment of the relaxation and recovery properties of polymeric textile materials for technical purposes //Chemical fibers. – 2020, № 3. P.39 ... 42.
- 2 Pereborova N.V. Criteria for a qualitative assessment of the deformation-functional properties of polymeric textile materials for technical purposes//Chemical fibers. – 2020, № 4. P.37...40.
3. Pereborova N.V. Criteria for a qualitative assessment of relaxation processes of polymeric textile materials in order to assess their performance properties // Bulletin of the St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2020, № 1. P. 80...88.
4. Pereborova N.V., Serdyuk S.S., Kuzmin S.D., Smirnov G.A. Methods of system analysis in the study of viscoelastic properties of textile materials // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. – 2017, № 1. S.16...26.
5. Pereborova N.V., Egorova M.A., Shvankin A.M. Methodology of mathematical modeling of deformation processes of polymeric textile materials//Bulletin of St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2017. V. 29, № 1. S. 20...28.
6. Pereborova N.V., Ananichev E.A., Antonova I.A., Korobovtseva A.A., Fedorova S.V. Methodology of modeling and computer prediction of deformation-operational properties of polymeric textile materials // Izv. universities. Light industry technology. - 2019, №1. P. 136 ... 145.
7. Pereborova N.V., Ananichev E.A., Antonova I.A., Korobovtseva A.A. A variant of predicting shrinkage and recovery of aramid textile materials // Bulletin of the St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2019, № 1. P. 87...97.
8. Pereborova N.V., Abramova I.V., Ananichev E.A., Antonova I.A., Korobovtseva A.A. Options for modeling the deformation-operational properties of polymeric fibrous materials of complex structure // Bulletin

of the St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2019, № 1. P. 98...107.

9. Pereborova N.V., Egorova M.A., Kalanchuk O.E., Fedorova S.V. Mathematical modeling and computer prediction of viscoelastic creep of geotextile nonwoven materials // Bulletin of the St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2019, № 4. P.51 ... 58.

10. Pereborova N.V., Shvankin A.M., Kovtun M.A. Forecasting complex deformation processes of polymeric materials used for shoe production//Bulletin of St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2017. V. 29, № 1. P. 38...46.

11. Pereborova N.V. Methodology of computer simulation of deformation-relaxation processes of polymeric textile materials//Bulletin of St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. - 2017. V. 30, № 2. P. 33...42.

12. Pereborova N.V., Maksimova N.A. Logistic model of the process of organizing a warehouse for finished products of textile and light industry // Bulletin of the St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. - 2017. V. 32, № 4. P. 114...117.

13. Pereborova N.V. Increasing the competitiveness of aramid textile materials based on a qualitative analysis of their performance and deformation properties // Bulletin of the St. Petersburg State University of Technology and Design. Series 1. Natural and technical sciences. – 2017. V. 32, № 4. S. 123...132.

14. Pereborova N.V., Maksimova N.A., Chistyakova E.S. A variant of the logistic model of the warehouse for textile and light industry products // Izv. universities. Light industry technology. – 2018, № 1. P.115...118.

Рекомендована кафедрой интеллектуальных систем и защиты информации. Поступила 12.08.22.