

УДК 677.024

DOI 10.47367/0021-3497_2023_5_45

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИЗГИБНОЙ ЖЕСТКОСТИ ЛЬНЯНОГО ВОЛОКНА
ПРИ ЕГО ПРОГИБЕ*****DETERMINING THE BENDING STIFFNESS OF FLAX FIBER
IN ITS DEFLECTION**А.В. ОРЛОВ¹, Е.Л. ПАШИН²A.V. ORLOV¹, E.L. PASHIN²¹Костромской государственной университет,
²Костромская государственная сельскохозяйственная академия)¹Kostroma State University,
²Kostroma State Agricultural Academy)

E-mail: aorlov@list.ru

При определении изгибной жесткости пряди льняного волокна с использованием метода трехточечного прогиба с повышенной кривизной требуется выбор координат точек ее расположения на поверхности цилиндрических опор. Поиск этих координат предложено осуществлять посредством оптимизации функции ошибки из двух составляющих: величин линейного и углового отклонения линии пряди от касательной к поверхности опоры в предполагаемой точке контакта. Нахождение минимума функции ошибки обеспечивает определение корректного значения изгибной жесткости EJ . При поиске минимума применен безградиентный метод оптимизации Нелдера-Мида. В качестве начального приближения изгибной жесткости принята ее величина, определенная по стандартному способу испытания гибкости лубяных волокон – путем прогиба закрепленных в виде консоли участков пряди определенной длины и массы под действием силы тяжести. Вследствие наличия только одного минимума функции ошибки в рассматриваемом диапазоне значений изгибной жесткости и угла наклона касательной к оси, соединяющей центры опор, обеспечивается одно стабильное решение при определении искомой изгибной жесткости.

When determining bending stiffness of a flax fiber strand using three-point bending method, it is necessary to select the coordinates of its location points on the surface of the cylindrical supports. It is proposed to search for these coordinates by optimizing the error function of two components: the magnitude of the

* Исследование выполнено за счет средств гранта Российского научного фонда (проект № 23-26-00147).

linear and angular deviation of the strand line from the tangent to the support surface at the assumed point of contact. Finding the minimum of the error function ensures that the correct value of the bending stiffness EJ is determined. As an initial approximation of flexural stiffness, its value was taken, determined by the standard method of testing the flexibility of bast fibers - by bending sections of strands of a certain length and mass fixed in the form of a cantilever under the influence of gravity. Due to the presence of only one minimum of the error function in the considered range of values of bending stiffness and the angle of inclination of the tangent to the axis connecting the centers of the supports, one stable solution is provided when determining the required bending stiffness.

Ключевые слова: льняное волокно, изгибная жесткость, испытание, трехточечный прогиб, опоры, контакт пряди, координата точки контакта, оптимизация, минимальная ошибка.

Keywords: bending stiffness, testing, three point bending, supports, point of contact, flax fiber, error minimization.

При поиске направлений совершенствования стандартного способа измерения изгибной жесткости льняного волокна [1, 2] с учетом его недостатков [3] предложен вариант испытания путем трехточечного прогиба [4], основанный на выявлении параметров упругой линии пряди в виде отрезка определенной длины и массы [5] (рис. 1).

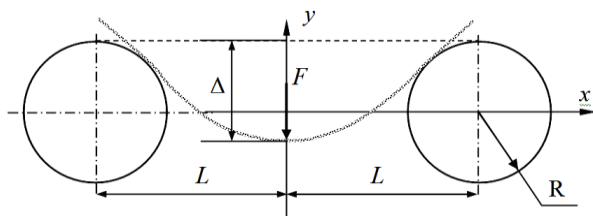


Рис. 1

При выявлении параметров упругой линии приняли во внимание наличие в

$$EJ \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = \Sigma M_{kz}, \text{ или } EJ \frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}} = R_{oy}x - R_{ox}y - M_o, \quad (1)$$

где EJ – изгибная жесткость пряди, иные параметры выражения (1) указаны в [5].

схеме нагружения оси симметрии (ось y). Поэтому для определения изгибной жесткости рассматривали только часть пряди, лежащую справа от оси y. Тогда часть пряди OB можно считать жестко заделанной в сечении O (рис. 2).

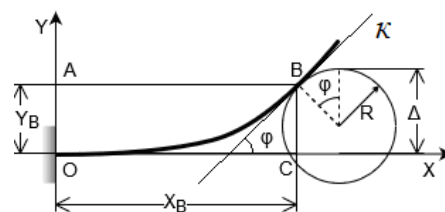


Рис. 2

При расчетах использовали известные выражения, вытекающие из нелинейной теории изгиба [6]:

С использованием численного метода Эйлера [7] получено итоговое решение:

$$y_{i+2} = 2y_{i+1} - y_i + (R_{oy}x_i - R_{ox}y_i - M_o) \cdot \left(1 + \left(\frac{y_{i+1} - y_i}{\Delta x} \right)^2 \right)^{3/2} \cdot \frac{\Delta x^2}{EJ}. \quad (2)$$

При анализе (2) установлено, что при значительных прогибах с повышенной кривизной оси пряди требуется определение оптимальных координат точки контакта волокна с поверхностью цилиндрической опоры [5]. Зная эти координаты, изгибную жесткость можно будет определить более точно в сравнении с вариантом анализа [8], при котором в условиях повышенных прогибов осуществляется уточнение результатов на основе использования эмпирической зависимости.

Указанный выбор координат обусловлен необходимостью корректного определения изгибной жесткости EJ с использованием выражения (2) на основе поиска угла φ , при котором функция $y(x)$ одновременно проходила бы через точку контакта (то есть через точку B с координатами: $x_B = LR \sin \varphi$ и $y_B = \Delta - R(1 - \cos \varphi)$) и имела касательную K , совпадающую с заданной точностью с касательной в т. B к поверхности опоры (рис. 2).

Такая процедура определения EJ вносит существенную неопределенность при подборе указанных параметров x_B , y_B , φ , что значительно усложняет расчеты.

Для упрощения алгоритма расчета предложено считать указанную процедуру подбора требуемых параметров двухпараметрической оптимизационной, требующей реализации на основе метода последовательных приближений. Это вытекает из понимания, что отклонение ε фактического места соприкосновения от точки B является функцией двух переменных: изгибной жесткости EJ и угла φ . При нахождении минимума функции $\varepsilon(EJ, \varphi)$ обеспе-

чивается наиболее точное определение изгибной жесткости EJ .

Успех поиска минимума функции $\varepsilon(EJ, \varphi)$ требует корректного выбора ее физической сущности. Для этого ограничим возможные значения этой функции диапазоном $[0; 1]$. Исходим из того, что отклонение ε будет представлять ошибку получаемого результата. Она является интегральной и складывается из двух составляющих: величины $\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi)$ в виде линейного отклонения фактического контакта от точки B и величины $\varepsilon_\varphi(EJ, \varphi)$ – отклонения угла наклона касательной к пряди в этой точке от угла φ .

Определение $\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi)$ затрудняется тем, что при достаточно малых значениях EJ отклонение фактического места соприкосновения пряди от точки B может достигать экстремальных величин, что должно учитываться при поиске условий $\varepsilon \rightarrow \min$. Для исключения этого предложено расчет формы упругой линии пряди, как последовательности точек (x_i, y_i) , продолжать до тех пор, пока последняя рассмотренная точка $D(x, y)$ не будет выходить за пределы прямоугольника $OABC$ (см. рис. 1) с выполнением соотношений $x < X_B$ и $y < Y_B$.

При таких условиях возможны два нежелательных исхода, варианты которых представлены на рис. 3. В случае малых значений EJ кривая оси пряди пересечет отрезок AB . Тогда в качестве критерия ошибки можно принять отношение длины отрезка DB к величине L (рис. 3, а). Это отношение будет оставаться в диапазоне $[0; 1]$ для значений φ в диапазоне $[0; \pi]$.

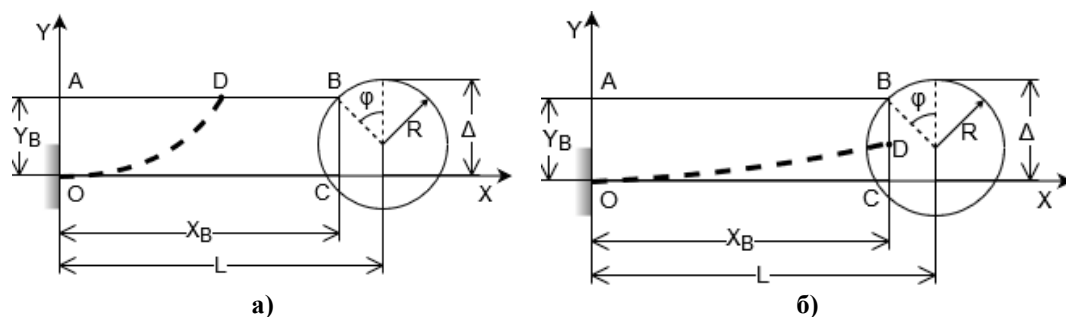


Рис. 3

В случае повышенных значений EJ кривая оси пряди пересечет отрезок BC , и в качестве критерия ошибки возможно использовать отношение длины отрезка BD к величине прогиба Δ (рис. 3, б). Такое отношение будет находиться в диапазоне $[0; 1]$ для значений φ в диапазоне $\left[0; \arccos\left(1 - \frac{\Delta}{R}\right)\right]$. При этом значения φ , превышающие $\pi/2$, будут указывать на то, что свободные участки пряди отклоняются вниз, что противоречит реальной схеме нагружения, представленной на рис. 1.

На основе указанных рассуждений ввели следующее соотношение для вычисления значения $\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi)$:

$$\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi) = \begin{cases} \frac{X_B - x}{L}, & \text{если } x < X_B \text{ } \dot{U}y^3Y_B \\ \frac{Y_B - y}{\Delta}, & \text{если } y < Y_B \text{ } \dot{U}x^3X_B \end{cases}. \quad (3)$$

Использование (3) позволяет гарантировать нахождение значения $\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi)$ в диапазоне $[0; 1]$ для любых значений EJ и φ , удовлетворяющих схеме нагружения (см. рис. 1). При этом прохождение пряди через точку B будет соответствовать равенству $\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi) = 0$.

Определение в интегральной ошибке ε составляющей $\varepsilon_\varphi(EJ, \varphi)$ можно осуществить, вычислив угол наклона $\varphi_{обр}$ касательной к пряди в последней точке D , рассматриваемой при определении E_{xy} . Поскольку прядь всегда отклоняется вверх, ее касательная всегда будет наклонена на угол в диапазоне $[0; \pi/2]$. При этом угол φ будет иметь такой же диапазон значений. Тогда расчет $\varepsilon_\varphi(EJ, \varphi)$ возможен с использованием следующей зависимости:

$$\varepsilon_\varphi(EJ, \varphi) = \frac{2|\varphi_{обр} - \varphi|}{\pi}. \quad (4)$$

Поскольку обе составляющие интегральной ошибки $\varepsilon(EJ, \varphi)$ находятся в одном диапазоне значений, можно агрегировать их следующим образом:

$$\varepsilon(EJ, \varphi) = 0,5(\varepsilon_y(EJ, \varphi) + \varepsilon_\varphi(EJ, \varphi)). \quad (5)$$

Такой подход позволяет получить функцию – критерий интегральной ошибки, обеспечивающую выполнение обоих условий корректного расположения на опорах пряди при ее нагружении по схеме трехточечного прогиба.

На основе предложенных выражений для определения интегральной ошибки $\varepsilon(EJ, \varphi)$ был реализован вычислительный эксперимент по поиску минимума этой ошибки. Его основой явилось применение безградиентного метода оптимизации Нелдера-Мида [9, 10]. Метод основан на последовательном перемещении из начальной зоны посредством деформирования (отражения, растяжения и сжатия) n -мерного симплекса в направлении точки экстремума с помощью итерационной процедуры. Выбор лучшего значения функции осуществляется с требуемой заранее заданной точностью.

Для расчетного эксперимента приняли начальные значения $EJ_0 = 2 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$ и $\varphi_0 = 15,7^\circ$, полученные с использованием стандартного метода [1]. Длина пряди 7 см, ее масса 0,11 г. Прогиб осуществлен на величину 0,4 см относительно двух круглых стеклянных опор, имеющих радиус закругления 0,42 см. Коэффициент трения пряди о поверхность опор равен 0,1. Расстояние между центрами опор 2,8 см. Для достижения указанного прогиба (0,4 см) потребовалась прилагаемая в центре длины пряди сила, равная 0,088 Н.

Итоги расчетного эксперимента согласно (3)-(5) представлены в виде карт значений функций ошибок $\varepsilon_{xy}(EJ, \varphi)$, $\varepsilon_\varphi(EJ, \varphi)$, $\varepsilon(EJ, \varphi)$ на рис. 4-6. На них отмечены позиции начального приближения (●) и итогового решения (×).

Из полученных результатов следует, что значение изгибной жесткости пряди EJ , соответствующее описанным выше условиям допустимости и согласующееся со схемой нагружения, представленной на рис. 1, оказалось равным $1,7 \cdot 10^{-5} \text{ Н} \cdot \text{м}^2$.

Примечательны результаты визуализации сравнения принятого исходного (начального приближения) и достигнутого конечного значений углов φ при поиске EJ исходя из минимизации составляющих (ε_{xy} ;

ε_φ) и интегральной функции ошибки ε . Из анализа карты агрегированной функции ошибки (рис. 6) следует наличие только одного минимума. Это означает, что в рассматриваемом диапазоне значений EJ и φ

задача имеет одно стабильное решение, которое будет формироваться независимо от выбранного начального приближения.

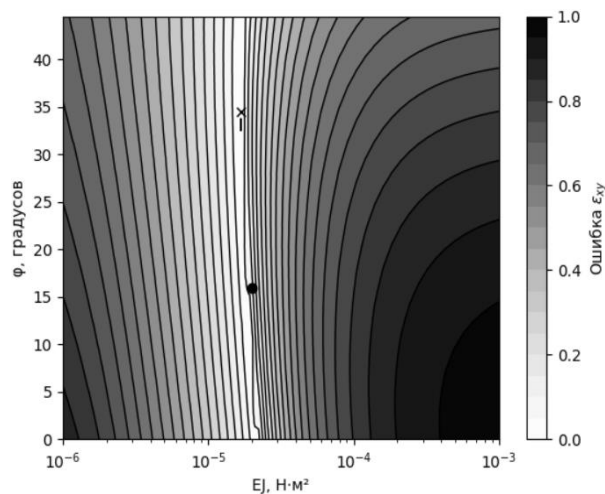


Рис. 4

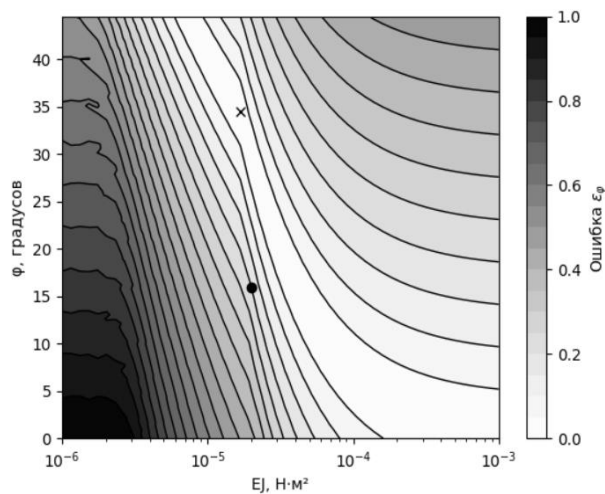


Рис. 5

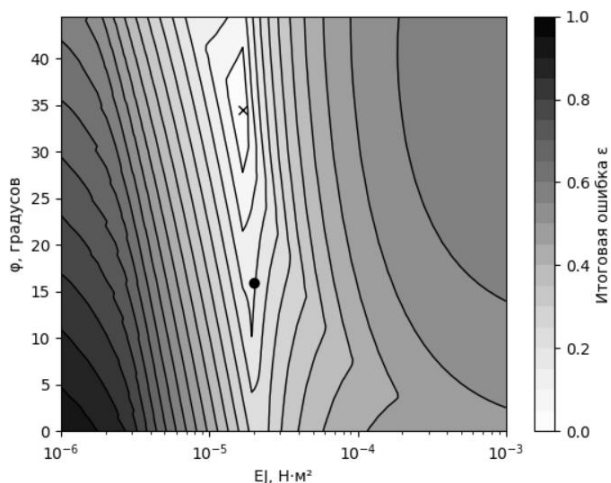


Рис. 6

ВЫВОДЫ

1. Определение изгибной жесткости волокнистой пряжи при испытании посредством трехточечного прогиба с повышенной кривизной ее оси требует подбора оптимальных координат точки ее соприкосновения и расположения относительно поверхности цилиндрических опор.

2. Поиск координат точки соприкосновения сводится к оптимизации функции ошибки от двух переменных: угловой координаты точки касания и изгибной жест-

кости EJ . Нахождение минимума этой функции ошибки обеспечит определение искомого значения изгибной жесткости EJ . Функция ошибки должна состоять из двух составляющих: величины линейного и углового отклонения точки формируемого фактического касания пряжи поверхности опоры от требуемой по расчетам точки контакта, для которой упругая линия пряжи одновременно проходила бы через рассчитанные координаты этой точки и имела касательную, совпадающую с касательной к поверхности опоры.

3. При поиске минимума предложенной функции ошибки с применением безградиентного метода оптимизации Нелдера-Мида в качестве начального приближения EJ_0 возможно использовать результат оценки этой величины по стандартному способу испытания гибкости лубяных волокон. При таких условиях обеспечивается одно стабильное решение вследствие наличия только одного минимума функции ошибки в рассматриваемом диапазоне значений EJ и φ .

ЛИТЕРАТУРА

1. ГОСТ Р 53484-2009. Лен трепаный. Технические условия. М.: Стандартинформ, 2009. 13 с.

2. *Городов В.В., Лазарева С.Е., Лунёв И.Я. и др.* Испытания лубоволокнистых материалов. М.: Легкая индустрия, 1969. 208 с.

3. *Пашин Е.Л., Нестерова Т.Н.* Недостатки стандартного метода определения гибкости трепанного льняного волокна // Научные приоритеты апк в России и за рубежом: сб. ст. 72-й науч.-практ. конф. с междунар. участием. Караваяво: Костромская ГСХА, 2021. С. 342...350.

4. ГОСТ 9187-74. Картон обувной. Метод определения жесткости и изгибостойкости при статическом изгибе. М.: Изд-во стандартов, 1987. 5 с.

5. *Разин С.Н., Пашин Е.Л., Орлов А.В.* Метод определения изгибной жесткости льняного волокна для его квалиметрии: обоснование алгоритма испытания // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. 2023. № 3. С. 81...87.

6. *Попов Е.П.* Теория и расчет гибких упругих стержней. М.: Наука, 1986. 296 с.

7. *Дарков А. В., Шпиро Г. С.* Соппротивление материалов. М.: Высш. шк., 1989. 643 с.

8. ГОСТ Р 56805-2015. Композиты полимерные. Методы определения механических характеристик при изгибе. М.: Стандартинформ, 2016. 19 с.

9. *Nelder J.A., Mead R.* A simplex method for function minimization // Computer Journal. 1965. № 7(4). P. 308...313.

10. *Чунаев П.В., Боченина К.О.* Анализ и разработка алгоритмов: учебно-методическое пособие. СПб: Университет ИТМО, 2020.

REFERENCES

1. ГОСТ R 53484-2009. Scutched flax fibre. Specifications. Moscow: Standartinform, 2009.

2. *Gorodov V.V. et al.* Testing of bast fiber based materials. Moscow: Legkaja industrija, 1969. 208 p.

3. *Pashin E.L. and Nesterova T.N.* Flaws of the standard method of measuring flexibility of flax fiber, // Compilation of articles of 72 nd scientific-practical conference. Karavaevo: Kostroma State Agricultural Academy, 2021. P. 342...350.

4. ГОСТ 9187-74. Cardboard. Method of measuring of stiffness and tensile strength under static bending, Moscow: Izdatelstvo standartov, 1987.

5. *Razin S.N., Pashin E.L., Orlov A.V.* A method of measuring bending rigidity of flax fiber during its qualimetry: determining properties of a testing algorithm // Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii, Seriya Tekhnologiya Tekstil'noi Promyshlennosti. 2023. No 3. P. 81...87.

6. *Popov E.P.* Theory and calculation for flexible elastic rods. Moscow: Nauka, 1986. 296 p.

7. *Darkov A.V. and Shpiro G.S.* Resistance of materials. Moscow: Vysshaya shkola, 1989. 643 p.

8. ГОСТ R 56805-2015. Polymer composites. Methods for determination of flexural properties. Moscow: Standartinform, 2016.

9. *Nelder J.A., Mead R.* A simplex method for function minimization // Computer Journal. 1965. No. 7(4). P. 308...313.

10. *Chunaev P.V. and Bochenina K.O.* Analysis and development of algorithms: a teaching aid. St. Petersburg: ITMO university, 2020.

Рекомендована кафедрой технических систем в агропромышленном комплексе Костромской ГСХА. Поступила 26.01.23.