

УДК 677.017.427:539.3

**УТОЧНЕННЫЙ ВАРИАНТ ПРОЕКТИРОВАНИЯ ШЕРСТЯНОЙ ПРЯЖИ
МАЛЫХ ЛИНЕЙНЫХ ПЛОТНОСТЕЙ ДЛЯ ТКАНИ SUPER 100**

**THE SPECIFIED VARIANT OF DESIGNING OF WOOL YARN
OF SMALL LINEAR DENSITY FOR SUPER 100 FABRIC**

В.П. ЩЕРБАКОВ, О.В.КАЩЕЕВ
V.P. SHCHERBAKOV, O.V. KASCSHEEV

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)
(Moscow State Textile University "A.N. Kosygin")
E-mail: office@msta.ac.ru

Дана теория одноосного растяжения нити и пряжи с учетом изменения диаметра и действия поперечных сил. Рассмотрен метод проектирования пряжи по заданным характеристикам волокон и структуре пряжи применительно к чистошерстяной пряже линейной плотности 15,6 текс.

The theory of uniaxial tension of a thread and yarn has been presented in view of the change of a diameter and cross forces effect. The method of yarn designing under the given fibers' characteristics and the yarn structure with reference to the pure wool yarn of linear density 15,6 tex has been considered.

Ключевые слова: проектирование, шерстяная пряжа, ткани малых линейных плотностей, одноосное растяжение ткани, заданные характеристики волокон.

Keywords: designing, wool yarn, fabrics of small linear density, uniaxial tension of a fabric, given characteristics of fibers.

Приведенный в [1] вывод не учитывает ни изменения толщины нити при деформировании, ни действия поперечных сил, возникающих из-за пространственного расположения волокон в нити. Проведем более полное исследование напряжений и деформаций волокон и нити, приближающее прочностные расчеты нити к действительному состоянию нити при ее нагружении. Теория вопроса основана на работах известного английского специалиста в области структурной механики текстильных материалов J.W.S. Hearle [2]. Его

замечательные труды по описанию деформирования, жесткости и прочности нити и пряжи можно считать основополагающими, наиболее полными и глубокими. К сожалению, в нашей стране получили распространение в основном эмпирические и преимущественно ошибочные теоретические методы проектирования вследствие искаженного представления отечественной науки о приоритетах в мировой текстильной технике и технологии, а также недостаточности знаний механики и математики, чтобы оценить строгость и точность

решений. Даже в одной из последних докторских диссертаций, в которой наряду с другими рассмотрены вопросы проектирования пряжи, нет упоминания об аналитических методах, как будто их никогда не существовало.

Разрушение нити начинается с разрыва волокон. Предел прочности волокна при растяжении определяется соотношением $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*}$. Здесь и далее звездочкой обозначены величины, относящиеся к предельному состоянию. Деформация волокон уменьшается пропорционально $\cos^2 \beta$ в радиальном направлении нити от $\varepsilon_f = \varepsilon_y$ до $\varepsilon_f = \varepsilon_y \cos^2 \beta$. Максимальная деформация возникает в центральных волокнах и равна деформации нити ε_y . Максимальное напряжение или предел прочности при растяжении центральных волокон, которые первыми разрываются и затем инициируют разрушение нити, равно $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*}$ или $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{y*}$. Напряжение в нити при той же деформации ε_{y*} определяется выражением $\sigma_{y*} = E_y \varepsilon_{y*}$. Отсюда следует, что отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю упругости волокна. В простейшем случае, не учиты-

вающем ни изменения диаметра нити, ни действия поперечных сил, предел прочности нити определяется формулой [2], [3]:

$$\sigma_{y*} = \sigma_{f*} \cos^2 \beta. \quad (1)$$

Введем параметры $u = \frac{h}{L}$, $c = \cos \beta = \frac{h}{L}$, где L – длина винтовой линии на поверхности нити, соответствующая радиусу R ; u – радиальное расположение волокна, изменяющееся от нуля в центре нити до единицы на ее поверхности. В дальнейшем нам необходимы соотношения:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{L^2 - h^2}{L^2 - h^2} = \frac{u^2 - c^2}{1 - c^2}, \quad (2)$$

$$L^2 = h^2 + 4\pi^2 r^2, \quad (3)$$

$$\cos \theta = \frac{h}{u} = \frac{c}{u}, \quad (4)$$

$$\sin \theta = \frac{2\pi r}{u} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}. \quad (5)$$

Рассмотрим малый элемент волокна в нити (рис. 1), расположенный между двумя цилиндрами радиусов r и $(r+dr)$ и между двумя винтовыми линиями, смещенными относительно друг друга на угол $d\varphi$.

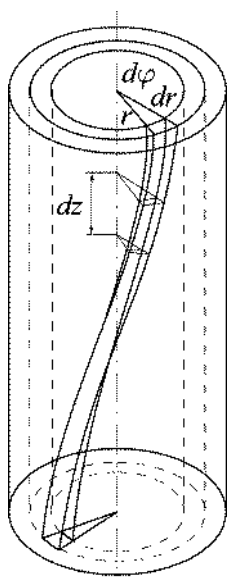


Рис. 1

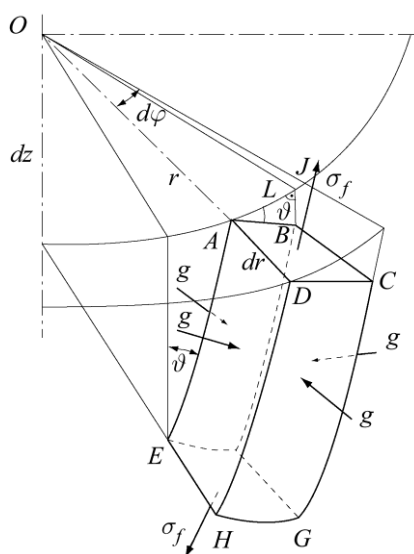


Рис. 2

Элементарный объем ориентирован вдоль направления винтовой линии и определяется длиной отрезка dz ,

$$Ad = dr, AB = AJ\cos\theta = rd\varphi\cos\theta, AE = EK\sec\theta = dz\sec\theta.$$

Действующие на элемент силы направлены по нормали к каждой из шести граней объема, напряжение σ_f в волокне действует параллельно, напряжение g – перпендикулярно оси волокна. Принимаем $(+\sigma_f)$ – растяжение и $(+g)$ – сжатие.

Изменение диаметра нити может быть определено параметром, аналогичным коэффициенту Пуассона, характеризующему поперечное сжатие:

$$v_y = -\frac{dr/r}{dh/h}. \quad (6)$$

Определив деформацию нити как $\varepsilon_y = \frac{dh}{h}$ и приняв во внимание (4) и (5), напомним формулу:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_y \left[\frac{c^2}{u^2} - v_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right], \quad (7)$$

связывающую деформацию волокна ε_f с деформацией нити ε_y .

В условиях растягивающего σ_f и сжимающего g напряжения деформация волокна, как это следует из курса сопротивления материалов:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} - \frac{2v_f}{E_f}(-g), \quad (8)$$

где v_f – коэффициент Пуассона волокна.

Объединив оба выражения для деформаций волокна, получим:

$$\varepsilon_y \left[\frac{c^2}{u^2} - v_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] = \frac{1}{E_f} (\sigma_f + 2v_f g),$$

параллельного оси нити. Из рис. 2 (равновесие элемента волокна) имеем:

откуда

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_y \left[\frac{c^2}{u^2} - v_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] - 2v_f g. \quad (9)$$

Произведение $E_f \varepsilon_f$ равно напряжению σ_f , которое возникает в центральных волокнах ($r=0$), где деформации волокна и нити одинаковы. Используя σ_{f0} в качестве нормализующего параметра, перейдем к безразмерным величинам

$$\sigma_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_{f0}}, \quad (10)$$

$$g = \frac{g}{\sigma_{f0}}. \quad (11)$$

Здесь величины со знаком тильды наверху являются безразмерными. Тогда:

$$\sigma_f = \frac{c^2}{u^2} - v_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) - 2v_f g. \quad (12)$$

Перейдем к анализу условий равновесия выделенного малого объема. Выпишем силы, действующие на шести координатных площадках (рис. 2):

сила на площадках ABCD и EFGH:

$$\sigma_f S_{ABCD} = \sigma_f AB \cdot AD = \sigma_f r \cos\theta d\theta dr,$$

сила на площадках ADHE и BCGF:

$$g S_{ADHE} = g AD \cdot AE = g \sec\theta dr dz,$$

сила на площадке ABFE:

$$g S_{ABFE} = g AB \cdot AE = g r d\varphi dz.$$

Что же касается радиального напряжения g и площади элемента, перпендикулярного радиусу нити, то они изменяются

$$grd\varphi dz + \frac{\partial}{\partial r}(gr)drd\varphi dz = grd\varphi dz + \left(g + r \frac{dg}{dr}\right)drd\varphi dz.$$

Объединив силы, действующие на элемент вдоль радиуса нити, получим

$$\sigma_f \sin^2 \theta d\varphi dr dz - g \cos^2 \theta d\varphi dr dz + \left(g + r \frac{dg}{dr}\right) d\varphi dr dz = 0.$$

Подставляя в это выражение значение σ_f , получаем дифференциальное уравнение равновесия волокна в нити в проекциях на радиальное направление:

$$\frac{dg}{du} = -\frac{1}{u} \left[\frac{c^2}{u^2} - v_y \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) - (2v_f - 1)g \right],$$

или

$$\frac{dg}{du} - (2v_f - 1) \frac{g}{u} = -\left(1 + v_y\right) \frac{c^2}{u^3} + \frac{v_y}{u}. \quad (13)$$

После интегрирования с граничными условиями, учитывающими, что на поверхности нити напряжение g равно нулю ($g=0$ при $u=1$), имеем:

$$g = \frac{1 + v_y}{1 + 2v_f} \frac{c^2}{u^2} \left(1 - u^{1+2v_f} \right) - v_y \frac{1 - u^{2v_f-1}}{2v_f - 1}. \quad (14)$$

Относительное растягивающее напряжение получаем из формулы (12):

$$\sigma_f (2\pi r dr \cos \theta) \cos \theta - g (2\pi r dr \sin \theta) \sin \theta = \frac{2\pi R^2}{1 - c^2} \left[\sigma_f \frac{c^2}{u^2} - g \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] u du.$$

Интегрированием этого равенства определяется суммарное растягивающее усилие:

$$\frac{2\pi R^2}{1 - c^2} \int_0^1 \left[\sigma_f \frac{c^2}{u^2} - g \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] u du.$$

вдоль радиуса r , и сила, действующая на площадке DCGH, определяется соотношением:

условие равновесия:

$$\sigma_f = \frac{(1 + v_y) c^2}{(1 + 2v_f) u^2} \left(1 + 2v_f u^{1+2v_f} \right) + v_y \frac{1 - 2v_f u^{2v_f-1}}{2v_f - 1}. \quad (15)$$

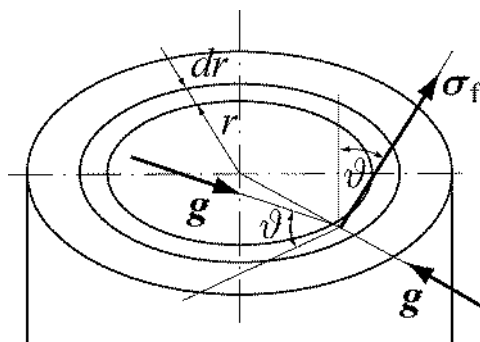


Рис. 3

Если рассматривать силы, действующие на малый элемент между двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами r и $(r+dr)$ и приводящие к растяжению нити, как показано на рис. 3 (направления растягивающих сил, действующих на элемент волокна), то компоненты нормального напряжения σ_f и напряжения g в окружном направлении и перпендикулярного к грани ADHE (см. рис. 2), в проекциях на осевое направление нити дают

После нормирования и усреднения путем деления интеграла на площадь поперечного сечения нити πR^2 имеем растягивающее напряжение в нити:

$$\sigma_y = \frac{2}{1-c^2} \int_0^1 \left[\sigma_f \frac{c^2}{u^2} - g \left(1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] u du.$$

В результате интегрирования с учетом выражений (14) и (15) получаем среднее

$$\sigma_y(\beta, \nu_f, \nu_y) = \frac{\sigma_{y*}}{\sigma_{f*}} = \frac{2c^2}{(1+2\nu_f)(1-c^2)} \left\{ (1+\nu_y) \left[\ln c + \frac{2(1+\nu_f)}{1+2\nu_f} \right] (1-c^{2\nu_f+1}) - \frac{\nu_y}{2} \left[\frac{3(1+2\nu_f)}{2\nu_f-1} - \frac{4(1+\nu_f)}{2\nu_f-1} c^{2\nu_f-1} - \frac{1}{c^2} \right] \right\}. \quad (16)$$

В USTER® STATISTICS приведены данные, собранные по всему миру от текстильных предприятий, в соответствии с которыми удельная разрывная нагрузка P_{ys} чистошерстяной пряжи линейной плотности 15,6 составляет 6,5 сН/текс. Брянский камвольный комбинат является основным инвестором проекта, в рамках которого предусмотрен выпуск легких камвольных чистошерстяных и полушерстяных тканей, включая Super 100 и Super 120. Здесь рассматривается метод проектирования пряжи по заданным характеристикам волокон и структуре пряжи применительно к чистошерстяной пряже линейной плотности 15,6 текс. Пряжа вырабатывается из австралийской мериносовой шерсти толщиной 18,5 мкм. Определим прочность волокна, обеспечивающую изготовление пряжи с заданными характеристиками. По существу решается вопрос выбора сырья для проектирования пряжи по прочности, конечно, при наличии других условий на волокна и пряжу, таких как неровнота, длина волокна, крутка и др.

При коэффициенте крутки $\alpha=30$ величина крутки $K = 760$ кр/м, и тогда шаг витка $h=1,317$ мм. При этом диаметр пряжи $d_y = 0,158$ мм и угол кручения $\beta = 0,36$ рад. Если параметр ν_y , характеризующий изменение диаметра пряжи, принять равным 0,5, что равносильно допущению о том, что при деформировании изменение объема не происходит, то тогда появляется возможность использования гипотезы Людви́ка о существовании "единой кри-

растягивающее напряжение в нити. Отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна представляет собой функцию $\sigma_y(\beta, \nu_f, \nu_y)$:

вой" деформирования, не зависящей от типа напряженного состояния и совпадающей с диаграммой растяжения. Экспериментальные кривые деформирования волокна и нити получают в условиях одноосного растяжения. По результатам испытаний и определяют упругие постоянные. Но волокно в составе нити нагружается продольной растягивающей силой и внешним давлением со стороны соседних волокон. Напряжение является сложным. Тогда можно, а по существу нужно, принять коэффициент Пуассона $\nu_y=0,5$, и только тогда диаграмма деформирования, построенная при сложном напряженном состоянии, и диаграмма растяжения совпадают. При коэффициенте Пуассона волокна $\nu_f=0,25$ функция

$$\sigma_y(\beta, \nu_f, \nu_y) = 0,831.$$

Коэффициент реализации средней прочности волокон в пряже:

$$k = \frac{(\alpha \epsilon)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (17)$$

при параметре распределения Вейбулла $\alpha=2,88$ равен $k=0,55$. Коэффициент скольжения, характеризующий уменьшение напряжения в пряже из волокон конечной длины по сравнению с напряжением в нити из бесконечных волокон:

$$k_c = 1 - \frac{2}{3} \left[\frac{aQ}{2\mu(1-\cos^2\beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

принимает значение $k_s = 0,992$. При вычислении напряжений предпочтительно использовать удельное напряжение как силу, отнесенную к массе единицы длины. Единицей удельного напряжения является 1 Н/текс. Связь между обычным напряжением σ и удельным σ_s выражается формулой $\sigma = \sigma_s \rho$ (ρ – плотность волокна). Принимая за единицу плотности 1 г/см³, единицу напряжения получаем равной 1 ГПа. Для шерстяного волокна $\rho = 1,33$ г/см³.

Из (16) находим предел прочности пряжи:

$$\sigma_{y*} = \sigma_{f*} \sigma_y (\beta, v_f, v_y) k k_c. \quad (19)$$

Напомним, что поставлен вопрос о подборе волокон для изготовления чисто-

шерстяной пряжи 15,6 текс с удельной разрывной нагрузкой 6,5 сН/текс. Вычислим, используя формулу (19), предел прочности волокна σ_{f*} , перейдем от напряжений к силам и получим прочность волокна толщиной 18,5 мкм – $P_{f*} = 5,1$ сН.

ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков В.П., Кащеев О.В. Проектирование шерстяной пряжи малых линейных плотностей для ткани Super 100 // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2012, №1. С.149...154.
2. Hearle J.W.S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
3. Щербаков В.П. Прикладная механика нити. – М.: МГТУ им. А. Н. Косыгина, 2001.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 06.12.11.