

УДК[677.025.071.252.: 677.53]: 677.071.4

## ОСОБЕННОСТИ ВЯЗАНИЯ И РАСЧЕТОВ МЕТАЛЛИЧЕСКОГО ТРИКОТАЖА

### FEATURES OF KNITTING AND CALCULATIONS OF METAL JERSEY

*В.П. ЩЕРБАКОВ, Н.В. ЗАВАРУЕВ, Т.И. ПОЛЯКОВА*  
*V.P. SHCHERBAKOV, N.V. ZAVARUEV, T.I. POLJAKOVA*

(Московский государственный университет дизайна и технологии)  
(Moscow State University of Design and Technology)  
E-mail: office@msta.ac.ru

*Рассматривается изготовление металлического трикотажа трубчатой формы с заданными параметрами петельной структуры. Приведен метод и пример расчета петельного шага и высоты петельного ряда с помощью аналитического решения оптимизационной задачи.*

*The article presents the manufacturing process of tubular metal knitted fabric with a given loop structure. It contains the calculation method and a sample calculation of the loop gauge and the course through an analytic solution of optimization problem.*

**Ключевые слова:** стальная нить, петля, упругость, жесткость, оптимум.

**Keywords:** steel string, loop, elasticity, rigidity, optimum.

Рассматривается вопрос изготовления металлического трикотажа трубчатой формы с заданными свойствами. Эти свойства здесь не приводятся, отметим лишь одно из главных условий: ширина трубки должна быть вполне определенной. Вязание осуществлено на одноцилиндровом автомате 14-го класса диаметром 2% дюйма из стальной проволоки толщиной 50 мк. Получены различные варианты трикотажных полотен, и в итоге наиболее приемлемым оказался вариант кулирной глади, при формировании которой в работе участвует каждая третья игла. Наибольшие

трудности возникли в достижении уже указанного ограничения – требуемой ширины трубки. Другими словами, следовало создать такие условия вязания, чтобы петельный шаг трикотажа находился в заданном интервале. Это удалось получить за счет величины оттяжки непосредственно при вязании, значительно превышающей обычные значения. Для этого на основе существующего механизма оттяжки полотна создано устройство, позволяющее регулировать величину оттяжки в значительных пределах. Кроме того, здесь мы воспользовались

известным свойством стальной проволоки малой толщины: способность пластически деформироваться при определенных нагрузках. В ходе многочисленных опытов получен вариант трубчатого трикотажа, удовлетворяющий заданным требованиям (рис. 1).

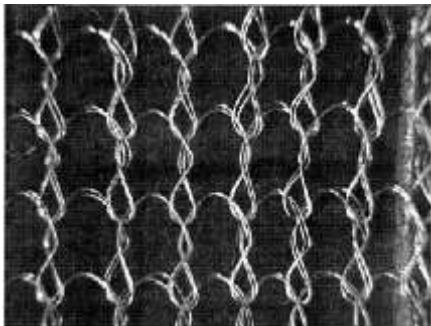


Рис. 1

Известно, что в обычной кулирной глади игольные и платинные дуги принимают форму дуги окружности, так как на этих участках упругой нити возникают только изгибающие моменты, а ось нити при чистом изгибе принимает форму дуги окружности. Иначе обстоит дело в нашем случае, когда вследствие пластического деформирования платинная дуга уже значительно отличается от окружности, напоминая, скорее, часть эллипса.

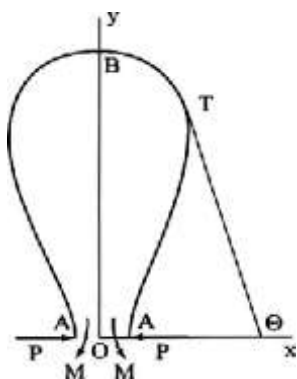


Рис. 2

Теперь, когда круговая форма не восстановилась, полученная задача требует принципиально нового подхода по сравнению с тем, как это происходит для обычной петли [1]. В статье G.A.V. Leaf [2] рассматривается форма, которую

принимает упругий гибкий стержень, изгибающийся силами и моментами на концах (рис. 2).

Прямолинейный стержень изгибается двумя равными, противоположно направленными силами  $P$  и моментами  $M$ , пока касательные к упругой линии в точках  $A$  и  $A'$  не станут параллельными и в то же время перпендикулярными линии действия  $P$ . Вследствие условий вязания и упругих свойств стальных нитей ветви петли соприкасаются между собой и расстояние между осевыми линиями петли в точках  $A$  и  $A'$  равно диаметру проволоки  $d$ .

Введем декартовы оси координат  $Oxy$  с началом  $O$  в середине отрезка  $AA'$ , ось  $Ox$  направим по линии действия силы  $P$ . Возьмем на упругой линии точку  $T(x, y)$  с дуговой координатой  $AT = s$ , и обозначим  $\vartheta$  угол между положительным направлением оси  $Ox$  и касательной к кривой в точке  $T$ . Пусть длина упругой линии  $ABA' = L$  и  $AA' = cL$ .

Расчетные уравнения упругой нити включают введенное Клебшем соотношение, основанное на пропорциональности кривизны нити к изгибающему моменту  $M$  внутренних усилий:  $M = H\kappa$ , где  $H$  – жесткость нити при изгибе. Точное выражение кривизны помимо написанного выражения можно написать в виде  $\kappa = \frac{d\vartheta}{ds}$ .

Тогда уравнение равновесия упругой линии при больших перемещениях записывается в форме

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{M}{H}. \quad (1)$$

Внутренний изгибающий момент в сечении  $T(x, y)$  равен:

$$H \frac{d\vartheta}{ds} = P_y - M.$$

Обозначим  $\beta^2 = \frac{H}{P}$ ,  $m = \frac{M}{P}$  и запишем точное уравнение равновесия упругой линии:

$$\beta^2 \frac{d\vartheta}{ds} = y - m. \quad (2)$$

Так как  $\frac{dy}{ds} = \sin \vartheta$ , то уравнение (2) преобразуется к виду:

$$\beta^2 \sin \vartheta d\vartheta = y dy - m dy.$$

После интегрирования с учетом  $y = 0$ ,  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$  в точке А получим:

$$y^2 - 2my = -2\beta^2 \cos \vartheta.$$

Дальнейшее решение будет проводиться в эллиптических интегралах Лежандра. Чтобы перейти к ним, прибавим к обеим частям последнего уравнения  $m^2$  и получим:

$$(y - m)^2 = m^2 - 2\beta^2 \cos \vartheta = m^2 + 2\beta^2 - 4\beta^2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2}.$$

Введем новые величины  $\alpha$ ,  $\nu$  и  $k$ . Обозначим  $\cos \alpha = \frac{m^2}{2\beta^2}$ . Новая переменная  $\nu$  определяется выражением  $\cos \frac{\vartheta}{2} = k \sin \varphi$ , где  $k = \cos \frac{\alpha}{2}$ . Тогда:

$$y - m = \pm \beta k \cos \nu. \quad (3)$$

В точке А примем  $\nu = \nu_0$ , когда  $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ . Здесь же  $y = 0$ , и из (3) следует:

$$-m = \pm 2\beta k \cos \nu_0. \quad (4)$$

Тогда

$$y = \pm 2\beta k (\cos \nu - \cos \nu_0). \quad (4a)$$

Дифференциал дуговой координаты:

$$ds = \frac{\beta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (5)$$

представляет собой дифференциальное уравнение равновесия упругой линии

через новую переменную  $\nu(s)$ . Произведем интегрирование вдоль упругой линии от начальной точки ( $s = 0, \nu = \nu_0$ ) до произвольной текущей точки ( $s, \nu$ ):

$$s = \beta \int_{\varphi_1}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}.$$

В правой части стоит эллиптический интеграл Лежандра первого рода, который

обозначается  $F(\varphi) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$  с

модулем  $k$  и амплитудой  $\nu$ . Теперь выражение для  $s$  может быть записано в форме:

$$s = \beta [F(\varphi) - F(\varphi_0)]. \quad (6)$$

Если учесть, что в точке В  $s = \frac{L}{2}$ ,  $\vartheta = \pi$ ,  $\nu = 0$ , то

$$\frac{L}{2} = [-F(\varphi_0)]. \quad (7)$$

Обе части этого равенства должны быть положительны, поэтому удерживаем верхний знак и из (7) получаем:

$$\beta = \frac{L}{2F(\varphi)}. \quad (8)$$

Для  $\nu_0$  воспользуемся выражением (4):

$$\cos \varphi_0 = -\frac{m}{2\beta k}. \quad (9)$$

Перейдем теперь к определению декартовых координат. Имеем очевидное соотношение:

$$\frac{dx}{dy} = \operatorname{ctg} \vartheta.$$

Дифференцируем по  $dv$ :

$$\frac{dx}{d\varphi} = \operatorname{ctg} \vartheta \frac{dy}{d\varphi} = \beta \left( 2\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi}} \right) \quad |.$$

Интегрируем:

$$x = \beta[2E(v) - F(v)], \quad (10)$$

где  $E(v)$  – эллиптический интеграл второго рода.

В точке А следующие граничные условия:  $v = v_0$ ,  $x = cL/2$ . Тогда из (10) следует:

$$\frac{cL}{2} = \beta[2E(\varphi_0) - F(\varphi_0)],$$

С учетом (8) получим:

$$c = \frac{2E(\varphi_0) - F(\varphi_0)}{F(\varphi_0)}. \quad (11)$$

Вычислим теперь максимальное значение  $x_{\max}$ . Условием максимума является равенство нулю производной  $\frac{dx}{d\varphi}$ :

$$2\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_{\max}} - \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \varphi_{\max}}} = 0.$$

Это дает:

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{1}{k\sqrt{2}}, \quad \cos \varphi_{\max} = \frac{\mu}{2\beta k}. \quad (12)$$

Максимальная ширина петли  $w$  определяется из выражения (10) при амплитуде  $v = v_{\max}$ :

$$w = 2\beta[2E(v_{\max}) - F(v_{\max})]. \quad (13)$$

Максимальная высота петли  $h = OB$  вычисляется из (4а) при  $v = 0$ , что дает

$$h = 2\beta k(1 - \cos v_0). \quad (14)$$

Напишем отношение максимальной высоты к максимальной ширине:

$$\frac{y_{\max}}{x_{\max}} = \frac{h}{w} = \frac{k(1 - \cos \varphi_0)}{2E(\varphi_{\max}) - F(\varphi_{\max})}. \quad (15)$$

Рассматривая соотношение (15), видим, что отношение  $\frac{y_{\max}}{x_{\max}}$  не зависит от

жесткости нити, а определяется модулем  $k$  и амплитудой  $v$  эллиптических интегралов.

Для проверки теории G.A.V. Leaf [2] использовал различные материалы с существенно отличающимися упругими свойствами: стальная пружинная проволока, бронза, ацетатная пленка,

писчая бумага. Значения  $\frac{h}{w}$  получены для

различных  $c$ . Аппроксимация  $\frac{h}{w}(c)$  приводит к линейной функции:

$$\frac{h}{w} = -2,72c + 2,08. \quad (16)$$

Теперь покажем, как вычислить игольный шаг и, следовательно, при известном числе игл определить ширину трубки. Число игл в цилиндре чулочного автомата 140. В работе, как указано ранее, участвует каждая третья игла, то есть в петельном ряду имеем 40 петли. Если длина протяжки равна двум игольным шагам, то  $\ell_{пр} = 1,814 \cdot 2 = 3,628 \approx 3,6$  мм. Длина нити в петле 7,6 мм. Отсюда длина нити в остова петли  $\ell_0$  равна 4,0 мм. Вследствие соприкосновения ветвей петли и даже захода их друг за друга расстояние  $cL = 0,05$  мм. Тогда доля этого расстояния относительно длины нити в остова  $c = 0,013$ . Отношение максимальной высоты к максимальной ширине остова петли в соответствии с (16) равно 2,045. Используя изложенную теорию, вычислим высоту  $h$  и ширину  $w$  остова петли при известной длине нити в остова. Запишем систему уравнений:

$$h = 2\omega(P, H) k(1 - \cos \varphi_0),$$

$$\sin \varphi_{\max} = \frac{1}{k\sqrt{2}},$$

$$0 = 2\omega(P, H) F(\varphi_0), \quad (17)$$

$$c = \frac{2E(\varphi_0) - F(\varphi_0)}{F(\varphi_0)}$$

$$\frac{h}{w} = \frac{k(1 - \cos \varphi_0)}{2E(\varphi_{\max}) - F(\varphi_{\max})}$$

Решение дает:  $P = 14,848$  сН;  $k = 0,85$ ;  $\nu_0 = 2,161$ ;  $\nu_{\max} = 0,982$ ;  $h = 1,7$  мм. Ширина остова  $w$  – высота  $h$ , деленная на 2,045, то есть  $h = 0,831$  мм. Протяжка, равная двум игольным шагам при петлеобразовании, за счет деформирования механизмом оттяжки превратилась в полуэллипс с осями: большая полуось  $a = 1,53$  мм, равная высоте петельного ряда плюс диаметр остова (ширина остова) и минус высота остова; малая полуось  $b$ , подлежащая вычислению и определяющая в конечном счете петельный шаг  $A$ . Длина полуэллипса  $L$  определяется эллиптическим интегралом:

$$L = 2a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left( \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \right)^2 \sin^2 t} dt \quad (18)$$

При известных величинах  $L$  и  $a$  вычислено значение  $b = 0,73$  мм. Таким образом, найден петельный шаг  $A = 2b \approx 1,5$  мм. Если учесть, что в работе участвует каждая третья игла из 120 игл цилиндра, то легко установить длину периметра готовой стальной трубки –  $\Pi = 60$  мм.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Щербаков В.П.* Прикладная и структурная механика волокнистых материалов. – М., 2013.
2. *Leaf G.A.V.* A property of a buckled elastic rod // British journal of applied physics. – Vol. 9, February 1958.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 21.04.14.