УДК 677.024

УПРОЩЕННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ОСНОВНЫХ И УТОЧНЫХ НИТЕЙ В ЗОНЕ ФОРМИРОВАНИЯ ОДНОСЛОЙНОЙ ТКАНИ ПОЛОТНЯНОГО ПЕРЕПЛЕТЕНИЯ*

С.Г.СТЕПАНОВ, И.И.ВОЛКОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

В [1] получена математическая модель взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования ткани (ЗФТ), включающая уравнения равновесия основной нити [2], уточных нитей [3], прибиваемой уточины [4], и связывающие их интегральные и геометрические соотношения. Там же показано, что для большинства тканей высóты волн изгиба, прогибы, углы поворота поперечных сечений уточин в ЗФТ являются малыми величинами. В этом случае равновесие всех уточин (кроме прибиваемой) в ЗФТ описывается одним уравнением 30 [1].

В [5] найдено приближенное аналитическое решение этого уравнения, с учетом которого геометрические соотношения для уточин и основной нити в ЗФТ принимают вид [(17), (22) 5]. Последним, однако, не исчерпывается потенциал упрощения математической модели [(1)…(29), 1].

Упростим систему уравнений равновесия прибиваемой уточины [(15)…(29), 1]. Пренебрегая скручиванием прибиваемой уточной нити, вследствие малых перемещений осевых линий основных и уточных нитей в зоне формирования, получим

$$\frac{dQ_{X_1}}{dx_1}=0\,, \qquad (1)$$

$$\frac{dQ_{X_2}}{dx_1}+F\delta(x_1-0{,}5L_0)-F\delta(x_1-1{,}5L_0)=0\,, \qquad (2)$$

$$\frac{dQ_{X_3}}{dx_1}+P\delta(x_1-0{,}5L_0)+P\delta(x_1-1{,}5L_0)=0\,, \qquad (3)$$

$$\frac{dM_{X_2}}{dx_1}-Q_{X_1}\psi_1-Q_{X_3}=0\,, \qquad (4)$$

$$\frac{dM_{X_3}}{dx_1}+Q_{X_2}-Q_{X_1}\varphi_1=0\,, \qquad (5)$$

$$\frac{dx_2}{dx_1}=\varphi_1\,, \qquad (6)$$

$$\frac{dx_3}{dx_1}=-\psi_1\,, \qquad (7)$$

$$M_{X_2}=A_{22}\frac{d\psi_1}{dx_1}\,, \qquad (8)$$

$$M_{X_3}=A_{33}\frac{d\varphi_1}{dx_1}\,. \qquad (9)$$

Из уравнения (1) следует

$$Q_{X_1}=C\,,$$

где C – постоянная интегрирования, определяемая из краевых условий нити.

Для Q_{X_1} [(8), 4] имеем с учетом малости прогибов и углов поворота поперечных сечений нити ($\cos\varphi_0\approx1$, $\sin\varphi_0\approx\varphi_0$):

$$Q_{X_1}=N^y-0{,}5F\varphi_0\,, \qquad (10)$$

где N^y, φ_0 – соответственно осевое усилие и угол наклона к оси X_1 касательной к осевой линии нити в краевых сечениях.

Осевое усилие в прибиваемой уточине:

– при выработке ткани на бесчелночных станках типа СТБ [(10), 4]:

$$N^y=N^y_{нач}+E_yS_y\left(\frac{\varepsilon}{2L_o}-1\right), \qquad (11)$$

– при выработке ткани на челночных станках:

* Научный консультант – докт. техн. наук, проф. Г.И. Чистобородов.

$$N^{y} = E_y S_y \left[\frac{\varepsilon}{2L_0(1+0,01D)} - 1 \right], \quad (12)$$

где $N^{y}_{нач}$ – начальное натяжение нити до прибоя; E_y, S_y – модуль жесткости нити при растяжении и площадь ее сечения; L_0, D – геометрическая плотность по основе и дозировка утка (%); ε – длина деформированной оси прибиваемой уточины между двумя соседними зубьями берда, для которой имеем

$$\varepsilon = \int_0^{2L_0} \sqrt{1 + \left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2}\, dx_1 .$$

Считая сумму квадратов под корнем малой величиной, разложим подынтегральное выражение в ряд, удерживая только два первых члена этого разложения

$$\varepsilon = \int_0^{2Lo} \left\{ 1 + 0,5 \left[\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2 \right] \right\} dx_1 . \quad (13)$$

Подставляя последовательно (11), (12) в (10) и учитывая выражение (13), после преобразований получим для натяжений в прибиваемой уточине:

– при выработке ткани на бесчелночных станках типа СТБ:

$$Q_{X_1} = C = N^{y}_{нач} + \frac{E_y S_y}{4L_0} \int_0^{2Lo} \left[\left(\frac{dx_2}{dx_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dx_1}\right)^2 \right] dx_1 - 0,5F\varphi_0 , \quad (14)$$

– при выработке ткани на челночном станке

$$Q_{X_1} = C = \frac{E_y S_y}{4L_0(1+0,01D)} \left\{ \int_0^{2L_0} \left[\left(\frac{dX_2}{dX_1}\right)^2 + \left(\frac{dX_3}{dX_1}\right)^2 \right] dX_1 - 4L_0 0,01D \right\} - 0,5F\varphi_0 . \quad (15)$$

Подставляя (8), (9) в (4), (5) и выражая из полученных уравнений Q_{X_3} и Q_{X_2}, после подстановки последних в (2) и (3) и перемножения полученных выражений на -1 с учетом (6), (7) и, принимая равенство изгибных жесткостей уточин в каждой из плоскостей ($A_{22}=A_{33}=A_y$), получим

$$A_y \frac{d^4 x_2}{dx_1^4} - Q_{X_1} \frac{d^2 x_2}{dx_1^2} - F\delta(x_1 - 0,5L_0) + F\delta(x_1 - 1,5L_0) = 0, \quad (16)$$

$$A_y \frac{d^4 x_3}{dx^4} - Q_{X_1} \frac{d^2 x_3}{dx_1^2} - P\delta(x_1 - 0,5L_0) - P\delta(x_1 - 1,5L_0) = 0. \quad (17)$$

Первое из этих выражений характеризует деформацию оси нити в плоскости $X_1O_1X_2$, второе – в плоскости $X_1O_1X_3$, [рис. 2-б, в, 4]. Оба они связаны через силу

Q_{X_1}, которая при малых прогибах остается постоянной по длине нити и зависит от деформаций последней в обеих плоскостях.

С учетом (6), (7), $A_{22}= A_{33}= A_y$ выражения (8), (9) для изгибающих моментов в каждой из плоскостей принимают вид:

$$M_{X_2} = -A_y \frac{d^2X_3}{dx_1^2}, \quad M_{X_3} = A_y \frac{d^2X_2}{dx_1^2}. \quad (18)$$

В ЗФТ геометрическое соотношение [(12), 1] применительно к основной нити и прибиваемой уточине принимает вид:

$$\left| \int_{S_2^*}^{S_0} \sin\varphi\, ds \right| + 2X_2\Big|_{X_1=0,5L_0} = d_0\eta_{0В} + d_y\eta_{yВ}, \quad (19)$$

где S_0, S_2^* – координаты точек пересечения оси основной нити с проходящими через центры прибиваемой (первой) уточины и второй уточины, отсчитываемые от начала координат.

Упростим выражение [(14), 1] для вертикальной составляющей F силы взаимодействия между основной нитью и прибиваемой уточиной. Влияние второго и, особенно, третьего слагаемых правой части [(14), 1], характеризующих трение, на величину F по сравнению с влиянием первого члена этой части в большинстве случаев будет незначительным.

Пренебрегая вторым и третьим членами правой части [(14), 1], получим:

$$F = \int_{S_2}^{S_1} q_1^0 \cos\varphi ds. \quad (20)$$

Преобразуем уравнения (1)…(3) [1].

Выразив из [(3), 1] Q и подставив в (1), (2) из [1], после преобразований, учитывая свойство функции Хевисайда [6], входящей в T(s) и W(s), а именно

$$\frac{d}{ds} f(s)H(s-s_i) = \frac{df(s)}{ds} H(s-s_i), \quad (21)$$

получим:

$$\frac{dN}{ds} + \left\{ A_0 \frac{d^2\varphi}{ds^2} + 0,5 d_0\eta_{OB} \left[T(s)(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) - \mu W(s)\right] \right\} \frac{d\varphi}{ds} -$$
$$-T(s)(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) - \mu G(s) = 0, \quad (22)$$
$$-A_0 \frac{d^3\varphi}{ds^3} + 0,5 d_0\eta_{OB} \left[T(s)\frac{d\varphi}{ds}(\sin\varphi + \mu\cos\varphi) + \mu \frac{dW(s)}{ds} \right] +$$
$$+N\frac{d\varphi}{ds} - F(s) + T(s)\sin\varphi = 0. \quad (23)$$

Преобразуем уравнение (22), учитывая при этом свойство (21), к виду

$$\frac{dN}{ds} = -0,5A_0 \frac{d}{ds}\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2 - 0,5 d_0\eta_{0В} \left[T(s)\frac{d}{ds}\left(\sin\varphi + \mu\cos\varphi\right) - \mu\frac{d}{ds}(\varphi W(s)) \right] +$$
$$+T(s)(\cos\varphi - \mu\sin\varphi) + \mu G(s).$$

Интегрируя это уравнение от 0 до s, имеем:

$$N=-0,5A_0\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2-0,5d_0\eta_{0в}\left[T(s)\left(\sin\varphi+\mu\cos\varphi\right)-\mu\varphi W(s)\right]+$$

$$+\int_0^s(\cos\varphi-\mu\sin\varphi)T(s)ds+\mu\int_0^s G(s)ds+C, \quad (24)$$

где C – постоянная интегрирования. Учитывая свойство функции Хевисайда [6]:

$$\int_{-\infty}^{s}H(s-s_i)ds=\int_{s_i}^{s}H(s-s_i)ds=(s-s_i)H(s-s_i),$$

получим

$$\int_0^s G(s)ds=\sum_{i=1}^{n}q_i^0\left[(s-s_{2i})H(s-s_{2i})-(s-s_{2i-1})H(s-s_{2i-1})\right]. \quad (25)$$

Постоянная интегрирования C определяется из условий

$$s=0;\quad N=-0,5A_0\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{\big|s=0}+C=N_T.$$

Отсюда

$$C=N_T+0,5A_0\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{\big|s=0}. \quad (26)$$

Выражение (24) с учетом (26) принимает вид:

$$N=N_T+0,5A_0\left[\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{\big|s=0}-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]-0,5d_0\eta_{0в}\left[T(s)\left(\sin\varphi+\mu\cos\varphi\right)-\mu\varphi W(s)\right]+$$

$$+\int_0^s(\cos\varphi-\mu\sin\varphi)T(s)ds+\mu\int_0^s G(s)ds. \quad (27)$$

Уравнение (27) позволяет определить натяжение в любой точке основной нити в ЗФТ. Для нахождения натяжения основной нити у опушки ткани необходимо выполнить расчет по уравнению (27) для всей длины основной нити.

Подставив (27) в (23), после преобразований с учетом свойства (21) имеем

$$A_0\left\{\frac{d^3\varphi}{ds^3}-0,5\left[\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{|s=0}-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]\frac{d\varphi}{ds}\right\}-$$
$$-\left[N_T+\int_0^s(\cos\varphi-\mu\sin\varphi)T(s)ds+\mu\int_0^s G(s)ds\right]\frac{d\varphi}{ds}-$$
$$-0,5d_0\eta_{0B}\mu\left[\frac{dW(s)}{ds}+\varphi\frac{d\varphi}{ds}W(s)\right]-T(s)\sin\varphi+F(s)=0. \quad (28)$$

Объединяя уравнения (28), (20), (16), (17), (19), [(4), (5), (13), 1], [(17), (22), 5] в систему, получим упрощенную математическую модель взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования однослойной ткани полотняного переплетения:

$$A_0\left\{\frac{d^3\varphi}{ds^3}-0,5\left[\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2_{|s=0}-\left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2\right]\frac{d\varphi}{ds}\right\}-$$
$$-\left[N_T+\int_0^s(\cos\varphi-\mu\sin\varphi)T(s)ds+\mu\int_0^s G(s)ds\right]\frac{d\varphi}{ds}-$$
$$-0,5d_0\eta_{0B}\mu\left[\frac{dW(s)}{ds}+\varphi\frac{d\varphi}{ds}W(s)\right]-T(s)\sin\varphi+F(s)=0, \quad (29)$$

$$\frac{dy}{ds}=\sin\varphi, \quad (30)$$

$$\frac{dx}{ds}=\cos\varphi, \quad (31)$$

$$\frac{4F^0_{n+1}L_y}{\pi^2(A_0\alpha_0^2+N_T)}+2\sqrt[3]{-\frac{g^y_{n+1}}{2}+\sqrt{D^y_{n+1}}}+2\sqrt[3]{-\frac{g^y_{n+1}}{2}-\sqrt{D^y_{n+1}}}=d_o\eta_{ов}+d_y\eta_{ув}, \quad (32)$$

$$\left|\int_{S^*_{i+1}}^{S^*_i}\sin\varphi\, ds\right|+2\sqrt[3]{-\frac{g^y_i}{2}+\sqrt{D^y_i}}+2\sqrt[3]{-\frac{g^y_i}{2}-\sqrt{D^y_i}}=d_0\eta_{0B}+d_y\eta_{yB},\ \left(i=2,3,...,n\right), \quad (33)$$

$$\left|\int_{S^*_2}^{S_0}\sin\varphi\, ds\right|+2X_{2}{}_{|X_1=0,5L_0}=d_0\eta_{0B}+d_y\eta_{yB}, \quad (34)$$

$$P=p(s_0-s_2)-\mu\int_{s_2}^{s_0}p\sin\varphi\cos\varphi ds-\int_{s_2}^{s_1}q_1^0\sin\varphi ds+\mu\int_{s_2}^{s_1}q_1^0\cos\varphi ds, \quad (35)$$

$$F=\int_{s_2}^{s_1}q_1^0\cos\varphi ds, \quad (36)$$

$$A_y\frac{d^4X_2}{dX_1^4}-Q_{x_1}\frac{d^2X_2}{dX_1^2}-F\delta(X_1-0,5L_0)+F\delta(X_1-1,5L_0)=0, \quad (37)$$

$$A_y\frac{d^4X_3}{dX_1^4}-Q_{x_1}\frac{d^2X_3}{dX_1^2}-P\delta(X_1-0,5L_0)-P\delta(X_1-1,5L_0)=0. \quad (38)$$

Аналитическое решение упрощенной системы уравнений (29)…(38) получить практически невозможно. Численное решение этой системы может быть получено на основе метода конечных разностей.

ВЫВОДЫ

Получена упрощенная математическая модель взаимодействия основных и уточных нитей в зоне формирования ткани полотняного переплетения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов С.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №4. С.73…76.

2. *Степанов С.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №1. С.47…51.

3. *Степанов С.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №2. С.52…55.

4. *Степанов С.Г.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, №3. С.44…48.

5. *Степанов С.Г., Волков И.И.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2006, № 6.

6. *Светлицкий В.А.* Механика гибких стержней и нитей. – М., 1978.

Рекомендована кафедрой начертательной геометрии. Поступила 26.11.06.