

УДК 677.11.620.1

**АНАЛИЗ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ
ТОНКОЙ РАСТЯЖИМОЙ ПО ГУКУ НИТИ
НА ШЕРОХОВАТОМ ЦИЛИНДРЕ**

А.Б. ЛАПШИНА, С.В. БОЙКО

(Костромской государственной технологической университет,
Всероссийский научно-исследовательский институт по переработке лубяных культур)

Ранее авторами получено решение задачи о плоском нестационарном движении тонкой, однородной, растяжимой по Гуку

нити на неподвижной шероховатой цилиндрической поверхности в плоскости нормального сечения цилиндра:

$$\left(\frac{T + \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right)}{T_0 + \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right)} \right)^A \left(\frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha T_0} \right)^B = \exp \left(\frac{k}{r} (C t + r \varphi) \right), \quad (1)$$

$$A = \frac{1 - \alpha \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} + \frac{C}{v} \right)}{1 - \alpha \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right)}, \quad B = \frac{\alpha \mu_0 v_0^2 \left(1 + \frac{C}{v} \right)}{1 - \alpha \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right)}, \quad (2)$$

где T_0, T – силы натяжения в ведомой и ведущей ветвях нити соответственно; α – удельное относительное удлинение нити; r – радиус кривизны направляющей цилиндрической поверхности; k – коэффициент трения скольжения; v – линейная скорость растянутой нити; $w = \frac{\partial v}{\partial t}$; t –

время (при выводе (1) предполагалось, что $w = \text{const}$); μ_0 – линейная плотность нити до растяжения; v_0 – постоянная скорость нерастянутой нити; $\mu v^2 = \mu_0 v_0^2 f$; μ – линейная плотность растянутой нити; f – функция растяжимости; $f = 1 + \alpha T$; φ –

угол охвата; C – пока неизвестная константа.

Цель настоящей статьи – ответить на следующие вопросы.

- 1). Каков физический смысл параметра C в (1)?
- 2). Почему из условия $w = 0$ следует $C = 0$?
- 3). Какова методика конкретного использования формулы (1)?

Имеем

$$p = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (3)$$

где s – эйлерова дуговая координата; $s = r \varphi$; а в соответствии с методом Лагранжа-Шарпи установлено [1]:

$$p = Cq. \quad (4)$$

Формулу (4), с одной стороны, можно записать в виде:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = C \frac{\partial f}{\partial s}, \quad (5)$$

а с другой стороны:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial s}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}. \quad (6)$$

Из (5) и (6) следует:

$$C = \frac{\partial s}{\partial t}, \quad (7)$$

то есть C – продольная скорость точки нити (относительно начала отсчета) за счет растяжения [2].

Запишем (7) в виде:

$$C = \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} \left(1 / \frac{\partial v}{\partial s} \right). \quad (8)$$

Учитывая, что:

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{f} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial s} \right),$$

из (8) получим:

$$C(p + vq) = wf. \quad (9)$$

$$\frac{T + \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right)}{T_0 + \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right)} = \exp \left(\frac{C t + r \varphi}{A} \left[\frac{k}{r} - \frac{w B}{C(C + v)} \right] \right), \quad (14)$$

Из (9) следует: если $w = 0$, то и $C = 0$.

Из (4) и (9) следует:

$$q = \frac{w f}{C(C + v)}. \quad (10)$$

Из соотношения:

$$df = p dt + q ds$$

с учетом (4) и (10) получим:

$$\frac{df}{f} = \frac{w}{C(C + v)} (C dt + ds). \quad (11)$$

Проинтегрируем (11):

$$\int_{f_0}^f \frac{df}{f} = C \int_{t_0}^t dt + \int_{s_0}^s ds,$$

или

$$\ln \left| \frac{f}{f_0} \right| = \frac{w}{C(C + v)} (C(t - t_0) + (s - s_0)), \quad (12)$$

или, если $t_0 = 0$, $s_0 = 0$, то

$$\frac{f}{f_0} = \frac{1 + \alpha T}{1 + \alpha T_0} = \exp \left(\frac{w}{C(C + v)} (Ct + r \varphi) \right). \quad (13)$$

Итак, параметр C должен удовлетворять двум уравнениям: (1) и (13). Для того, чтобы выполнить это требование, заменим в (1) скобку $\left((1 + \alpha T) / (1 + \alpha T_0) \right)$ в соответствии с (13), тогда получим одно уравнение:

или

$$T = \left(T_0 + \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right) \right) \cdot \exp \left(\frac{C t + r \varphi}{A} \left[k - \frac{w B}{C(C + v)} \right] \right) - \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right). \quad (15)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи формулы (15). Если движение стационарное ($w = 0$, $C = 0$) и нить нерастяжима ($\alpha = 0$), то из (15) получим известную формулу [3]:

$$T - \mu_0 v_0^2 = (T_0 - \mu_0 v_0^2) \exp(k \varphi). \quad (16)$$

При переходе от (15) к (16) предполагается, что $w B / (C(C + v)) = 0$, хотя $w = 0$, $C = 0$, $B = 0$.

Если в (15) $w = 0$, $C = 0$, $\alpha = 0$, $v_0 = 0$, то получим классическую формулу Эйлера: $T = T_0 \exp(k \varphi)$.

Заметим, что, если в (14) подставить $t = 0$, $\varphi = 0$, $T = T_0$, то получим тождество: $1 \equiv 1$. Поэтому для определения C нужно в (14) (или в (15)) подставить еще (кроме T_0) какое-либо экспериментальное значение силы натяжения, например,

$$T(\varphi) = \left(T_0 + \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right) \right) \cdot \exp \left(\frac{\varphi}{A} \left(1 + \frac{C}{C + v} \right) \left[k - \frac{r w B}{C(C + v)} \right] \right) - \mu_0 v_0^2 \left(\frac{r w}{k v^2} - 1 \right), \quad (18)$$

где $T(\varphi)$ – сила натяжения точки нити при угле охвата φ (после нахождения этой точки нити в зоне контакта в течение времени t (17)).

При такой интерпретации формулы (18) найденные экспериментально (обычно в лабораторных условиях) параметры k , α могут приводить к значительным погреш-

$T_1 = T(t = 0, \varphi = \varphi_K)$, φ_K – общий угол охвата в начальный момент времени $t = 0$.

После определения значения C можно применять формулу (15) для расчета силы натяжения T в различные моменты времени t при различных углах охвата φ .

Для проведения технологических расчетов обычно требуется определять силу натяжения в фиксированной точке нити после нахождения ее в зоне контакта в течение времени t . В этом случае переменные t , φ не являются независимыми, а именно:

$$t = r \varphi / (C + v). \quad (17)$$

В (17) учитывается выясненный выше физический смысл C ; C – это продольная скорость точки нити за счет растяжения.

Подставляя (17) в (15), окончательно получаем:

ностям.

Для наиболее адекватного их определения в данной модели необходимо в (18) считать изначально неизвестными параметры k , α , C . Для их нахождения достаточно в (18) подставить: $T_1 = T(\varphi_1)$, $T_2 = T(\varphi_2)$, $T_3 = T(\varphi_3)$. Тогда получится система из трех уравнений с тремя неиз-

вестными k, α, C .

Заметим, что при таком подходе среди величин T_0, T_1, T_2, T_3 не должно быть равных значений.

Покажем численно, что введенные в настоящей работе параметры нестационарности движения w и C могут существенно влиять на силу натяжения нити (продольные усилия в зоне контакта).

Для этого введем безразмерные комплексы (критерии подобия):

$$\begin{aligned} K_1 &= T/T_0, \quad K_2 = \alpha T_0, \\ K_3 &= \mu_0 v_0^2 / T_0, \quad K_4 = k \varphi, \\ K_5 &= C/v, \quad K_6 = r w / (k v^2). \end{aligned} \quad (19)$$

Теперь в безразмерном (критериальном) виде формулу (18) можно представить следующим образом:

$$K_1 = (1 + K_3(K_6 - 1)) \exp \left[\frac{K_4}{A} \left(1 + \frac{K_5}{K_5 + 1} \right) \left(1 - \frac{K_6 B}{K_5(K_5 + 1)} \right) \right] - K_3(K_6 - 1), \quad (20)$$

$$A = \frac{1 - K_2 K_3 (K_6 + K_5)}{1 - K_2 K_3 (K_6 - 1)}, \quad B = \frac{K_2 K_3 (1 + K_5)}{1 - K_2 K_3 (K_6 - 1)}. \quad (21)$$

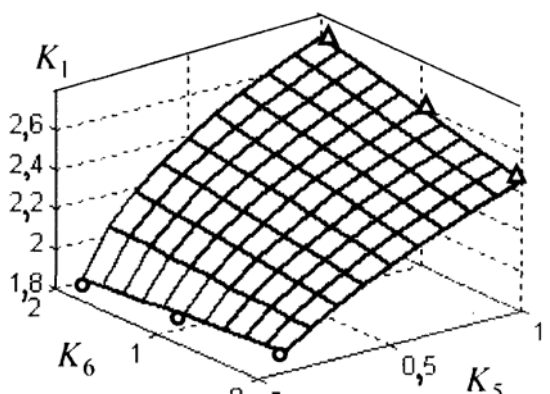


Рис. 1

На рис. 1 представлено изменение критерия K_1 при варьировании комплексов K_5, K_6 , если $0,1 \leq K_5 \leq 1$; $0 \leq K_6 \leq 2$; $K_2 = 0,1$; $K_3 = 0,1$; $K_4 = 0,2 \pi$.

Из рис. 1 следует, что введенные параметры нестационарности движения w и C существенно влияют на силу натяжения нити (критерий K_1).

Кроме того, различные сочетания параметров (факторов) в модели взаимодействия растяжимой нити с шероховатым цилиндром, представленной формулой (21), могут приводить к различным тенденциям изменения K_1 .

Например, при увеличении K_6 (если $K_5 = 0,1$) функция $K_1 = K_1(K_6)$ являет-

ся убывающей (линия отмечена маркерами-кружками, рис.1), а при $K_5 = 1$ – возрастающей (линия отмечена маркерами-треугольниками). Это объясняется сложным (нелинейным) характером влияния K_6 на K_1 .

Более того, этим же объясняется следующий новый (не проявляющийся в известных моделях) факт: если $K_6 = 0$, то первая скобка в (21) $(1 + K_3(K_6 - 1))$, соответствующая выражению $(T_0 - \mu_0 v_0^2)$, имеет известную интерпретацию: при вхождении элемента нити в зону контакта сила его натяжения мгновенно уменьшается на величину силы инерции $\mu_0 v_0^2$; однако, если $K_6 = 2$, то та же скобка соответствует выражению $(T_0 + \mu_0 v_0^2)$, означающая: при вхождении элемента нити в зону контакта сила его натяжения мгновенно увеличивается на величину силы инерции $\mu_0 v_0^2$.

Заметим, что этот новый факт установлен теоретически, поэтому его экспериментальное и / или теоретическое подтверждение и / или опровержение могут быть исследованы в дальнейшем.

ВЫВОДЫ

Методом Лагранжа–Шарпи получено и изучено аналитическое решение нелинейного дифференциального уравнения в частных производных относительно функции растяжимости, описывающего плоское движение тонкой, однородной, растяжимой по Гуку нити на неподвижной шероховатой цилиндрической поверхности в плоскости нормального сечения цилиндра.

Проведено сравнение полученного решения с известными зависимостями в моделях взаимодействия растяжимой нити с шероховатым цилиндром. Новое решение допускает различный характер влияния сил инерции на величину силы натяжения нити

(продольного усилия) в зоне контакта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шарма Д. Н., Сингх К. Уравнения в частных производных для инженеров. – М.: Техносфера, 2002.
2. Якубовский Ю. В. и др. Основы механики нити. – М.: Легкая индустрия, 1973.
3. Алексеев Н.И. Статика и установившееся движение гибкой нити. – М.: Легкая индустрия, 1970.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов. Поступила 03.10.06.