УДК 687.021.531.36

УРАВНЕНИЯ ДЛЯ РАСЧЕТА ПЛОСКОГО НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ МАЛОРАСТЯЖИМОГО ПОЛОТНА СЕТЧАТОЙ СТРУКТУРЫ

Е.В. ПОЛЯКОВА, П.А. ДЯТЛОВА

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

При расчетах малорастяжимых сеток, трикотажных изделий и армированных сетками пленок в качестве нулевого приближения можно использовать решения уравнений, в которых растяжимость нитей, образующих текстильные структуры указанных объектов, считается пренебрежимо малой. В настоящей работе такого рода уравнения получены и используются для анализа плоского напряженно-деформированного состояния полотна, имеющего ромбическую сетчатую структуру.

1. Исследуем структурные особенности функций, определяющих плоские деформации сетчатых полотен. Будем рассматривать полотно как сетку с бесконечно малыми ячейками.

Пусть в исходном состоянии сетка не деформирована, имеет квадратные ячейки и лежит на неподвижной плоскости, оснащенной декартовой системой координат xy, так что нити, ограничивающие ячейки, располагаются параллельно координатным осям. На нитях вводим лагранжевы координаты ξ и η их частиц, приписывая каждой частице в качестве значений ее лагранжевых координат ξ и η значения ее декартовых координат x и y.

При последующих деформациях сетки ее частицы сохраняют свои лагранжевы координаты, а декартовы координаты этих частиц изменяются и могут быть представлены формулами

$$x = \xi + u(\xi,\eta), \quad y = \eta + v(\xi,\eta), \tag{1}$$

где $u(\xi,\eta)$ и $v(\xi,\eta)$ – смещения частицы, имеющей лагранжевы координаты ξ и η, в направлениях осей x и y соответственно.

Радиус-вектор произвольной частицы полотна можно представить в виде следующей функции лагранжевых координат этой частицы:

$$r(\xi,\eta) = i(\xi + u(\xi,\eta)) + j(\eta+v(\xi,\eta)), \tag{2}$$

где i и j – базисные орты координатной системы xy.

Относительные удлинения нитей, образующих линии $\xi = \text{const}$ и $\eta = \text{const}$, в общем случае определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \sqrt{\left(1+\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right)^2} - 1, \\ \varepsilon_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)^2 + \left(1+\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right)^2} - 1. \end{aligned} \tag{3}$$

Далее существенно упростим задачу, допустив, что нити являются нерастяжимыми. В этом случае их относительные удлинения равны нулю, и формулы (3) приводят к равенствам:

$$2\frac{\partial u}{\partial \xi}+\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \xi}\right)^2=0,\qquad 2\frac{\partial v}{\partial \eta}+\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial \eta}\right)^2=0. \qquad (4)$$

На произвольно растянутой сетке можно выделить части трех типов:

1) части, растянутые в двух направлениях;

2) части, растянутые в одном направлении;

3) части, не растянутые ни в одном направлении.

Нами здесь изучаются только части первого типа, когда все ячейки сетки, образующей полотно, будут иметь форму ромбов. Последнее обстоятельство позволяет сделать важные выводы о структуре функций $u(\xi,\eta)$ и $v(\xi,\eta)$.

Рассмотрим, например, некоторую нить первого семейства, вдоль которой меняется только лагранжева координата ξ, как ломаную, составленную из бесконечно малых отрезков, равных стороне ромбов (ячеек), прилегающих к этой нити с одной стороны. Ясно, что эти ячейки образуют цепочку и имеют попарно смежные, равные и параллельные между собой стороны.

Каждая из этих сторон может быть представлена бесконечно малым вектором:

$$dr=\frac{\partial r}{\partial \eta}d\eta=\left[i\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta}+j(1+\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta})\right]d\eta.. \qquad (5)$$

То обстоятельство, что указанные векторы не зависят от выбора ячейки из указанной цепочки, может быть выражено равенством:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial \eta \partial \xi}=i\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial \eta \partial \xi}+j\frac{\partial v(\xi,\eta)}{\partial \eta \partial \xi}=0. \qquad (6)$$

Отсюда заключаем, что функции $u(\xi,\eta)$ и $v(\xi,\eta)$ имеют следующую структуру

$$u(\xi,\eta)=U_1(\xi)+U_2(\eta),$$
$$v(\xi,\eta)=V_1(\xi)+V_2(\eta), \qquad (7)$$

где $U_1(\xi), U_2(\eta), V_1(\xi), V_2(\eta)$ – произвольные функции своих аргументов.

Равенства (4), выражающие условия нерастяжимости нитей, с учетом (7) приводят к уравнениям:

$$2U_1'(\xi)+U_1'^2(\xi)+V_1'^2(\xi)=0,$$
$$U_2'^2(\eta)+2V_2'(\eta)+V_2'^2(\mu)=0. \qquad (8)$$

2. Уравнения равновесия полотна. Будем считать, что на полотно не действуют внешние распределенные по ее поверхности силы.

Тогда [1], [2] может быть записано уравнение равновесия

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_1(\xi,\eta)\left|\frac{\partial r(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma_2(\xi,\eta)\left|\frac{\partial r(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right|\right)=0, \qquad (9)$$

где

$$\sigma_1(\xi,\eta)=\frac{\partial r(\xi,\eta)}{\partial \xi}\sigma_{11},\qquad \sigma_2(\xi,\eta)=\frac{\partial r(\xi,\eta)}{\partial \eta}\sigma_{22}, \qquad (10)$$

где σ_{11} и σ_{22} – плотности натяжения нитей $\eta=\text{const}$ и соответственно нитей $\xi=\text{const}$ в расчете на единицу длины контуров, пересекаемых этими нитями.

Так как согласно (2), (3) и условию нерастяжимости нитей выполняются равенства

$$\left|\frac{\partial r(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|=\left|\frac{\partial r(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right|=1, \qquad (11)$$

векторное уравнение (9) с учетом (7) и (10) можно заменить следующей, эквивалентной ему, системой двух скалярных уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma_{11}(\xi,\eta)\left(1+U_1'(\xi)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sigma_{22}(\xi,\eta)U_2'(\eta)\right)=0. \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sigma_{11}(\xi,\eta)V_1'(\xi)\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sigma_{22}(\xi,\eta)\left(1+V_2'(\eta)\right)\right)=0. \quad (13)$$

3. Деформирование участка полотна при наличии двух осей симметрии. Пусть оси x и y являются осями симметрии рассматриваемого участка полотна в процессе его деформирования. Такого рода ситуации возникают, например, при растяжении прямоугольного куска полотна, имеющего разрезы или отверстия, не нарушающие его симметрии. В этих случаях равенства (7), определяющие перемещения точек полотна, могут быть упрощены.

Действительно, пусть некоторая часть такого куска пересекается осью y. Так как ось y является осью симметрии, каждая ячейка этой части имеет две вертикальные (параллельные оси y) стороны. Отсюда, поскольку ячейки являются ромбами с одинаковыми длинами сторон, следует, что эта часть состоит из вертикальных, простирающихся от нижней до верхней кромок этой части цепочек ячеек.

Математическим выражением этого факта является редукция общих выражений (7) для перемещений точек полотна к следующей форме:

$$u(\xi,\eta)=U_1(\xi), \qquad v(\xi,\eta)=V_1(\xi). \quad (14)$$

Аналогично, из того, что осью симметрии некоторой части рассматриваемого участка полотна является ось x, следует, что эта часть образована горизонтальными цепочками ромбов, имеющих по две горизонтальные стороны.

Перемещения частиц этой части определяются формулами

$$u(\xi,\eta)=U_2(\eta), \qquad v(\xi,\eta)=V_2(\eta). \quad (15)$$

Простая форма выражений (14) и (15) позволяет реализовать расчеты напряженно-деформированного состояния полотна в различных прикладных задачах.

В Ы В О Д Ы

1. Получены уравнения для расчета плоского напряженно-деформированного состояния полотна, имеющего сетчатую структуру, образованную нерастяжимыми нитями.
2. Аналитическая структура функций, описывающих перемещения, возникающие при плоских деформациях, изучаемых полотен, установлена в общем случае двуосного растяжения полотен, а также в случае их симметричных деформаций.
3. Задача определения деформаций и напряжений полотна сведена к отысканию перемещений его точек на основе решения уравнений его равновесия и уравнений, выражающих условия нерастяжимости нитей, образующих полотно.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Полякова Е.В., Чайкин В.А.* Прикладные задачи механики мягких оболочек и тканей. – СПб.: СПГУТД, 2006.
2. *Чайкин В.А., Полякова Е.В.* Основы механики мягких оболочек и тканей. - СПб.: СПГУТД, 2004.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 23.01.07.