

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИИ УГЛОВОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛОКОН В УСЛОВИЯХ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ

*И.П. КОРНЮХИН, Т.А. КОРНЮХИНА, С.А.МИРОНОВ*

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Ориентация волокон в волокнистых структурах оказывает влияние на закономерности фильтрации воздуха через волокнистые слои, на интенсивность протекающих в этих слоях процессов тепло- и массообмена. В отличие от результатов работы [1], где была получена одномерная функция распределения, здесь ставится задача получения двумерной функции распределения. Поэтому исходное уравнение, использованное в [1], в данном случае не применимо.

Получить такое уравнение можно, определив одну и ту же функцию распределения  $L$  в двух формах при помощи замены связанных строгими зависимостями переменных в функции плотности распределения  $\ell_0$ :

$$dL = \ell_0(x, y) dx dy = \ell_0(x(u, v), y(u, v)) |D| du dv, \quad (1)$$

где  $x(u, v)$  и  $y(u, v)$  – функции, связывающие старые и новые аргументы;  $|D|$  – модуль якобиана:

$$D = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Введем новую функцию плотности распределения  $\ell(u, v)$  связанную с представленной уравнением (1) функцией  $\ell_0$  соотношением

$$\ell(u, v) = \ell_0(x(u, v), y(u, v)) |D|. \quad (3)$$

Предполагается, что функция  $\ell_0$  известна либо легко определяется, а функциональная связь старых и новых пере-

менных определяется деформацией (растяжением или сжатием в осевом направлении) волокнистого материала.

Для представления зависимостей используется сферическая система координат, причем  $x$  и  $u \equiv \alpha$  рассматриваются как полярные углы, а  $y$  и  $v \equiv \phi$  – как азимутальные.

Функция  $\ell_0$  достаточно просто определяется при полностью хаотическом расположении волокон. В этом случае  $dL = ds/s$ , где  $s = 4\pi$  – площадь поверхности сферы единичного радиуса, а  $ds = \sin x dx dy$  – бесконечно малый элемент площади ее поверхности.

Таким образом, в соответствии с формулой (1) величину  $\ell_0$  можно представить как

$$\ell_0(x, y) = \frac{1}{4\pi} \sin x. \quad (4)$$

При деформации волокнистого материала в осевом направлении азимутальная ко-

ордината не изменяется, так что  $y = v = \phi$ .

Связь между полярными углами получим, рассматривая деформацию волокнистого материала в любой меридиональной плоскости аналогично тому, как это было сделано для плоской структуры в [1], игнорируя возможность перекоса:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \lambda \operatorname{ctg} x, \quad (5)$$

где  $\lambda$  – параметр, учитывающий осевую деформацию и принимающий значения  $\lambda > 1$  при растяжении и  $\lambda < 1$  – при сжатии.

Выполним следующие элементарные преобразования: исключим переменную  $x$  из формулы (4) при помощи уравнения (5), найдем производную  $\partial x / \partial \alpha$  и учтем, что  $\partial x / \partial \phi = 0$ ,  $\partial y / \partial \alpha = 0$  и  $\partial y / \partial \phi = 1$ , а следовательно,  $D = \partial x / \partial \alpha$ .

Эти преобразования позволяют представить плотность углового распределения (3) в виде

$$\ell(\alpha, \phi) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda^2 \sin \alpha}{\sqrt{(\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi. \quad (6)$$

Из-за осевой симметрии функция  $\ell(\alpha, \phi)$  непосредственно не зависит от азимутального угла и плотность распределения под заданным углом  $\alpha$  к направлению оси деформации может быть получена интегрированием (6) по  $\phi$ , что дает

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 \sin \alpha}{\sqrt{(\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3}}, \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (7)$$

Соответствующая функция распределения по углам наклона к выбранному направлению имеет вид

$$L(\alpha) = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\lambda^2 - (\lambda^2 - 1) \cos^2 \alpha}} \right), \quad 0 \leq \alpha \leq \pi. \quad (8)$$

Функция  $L(\pi) = 1$ , так что плотности распределения  $\ell(\alpha, \phi)$  и  $\ell(\alpha)$  нормированы на 1. Полярный угол в формулах (6)...(8) изменяется в пределах от 0 до  $\pi$ . Более наглядным представляется определение  $\ell(\alpha)$  в интервале углов  $-\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2$ .

С учетом того, что направления участков волокон под углами  $-\alpha$  и  $\pi - \alpha$  эквивалентны, такое определение дает

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{2} \frac{\lambda^2 |\sin \alpha|}{\sqrt{(\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3}}, \quad -\pi/2 \leq \alpha \leq \pi/2. \quad (9)$$

Графики таким образом определенной функции  $\ell(\alpha)$  при различных значениях параметра распределения  $\lambda$  представлены на рис. 1. Для кривых 1, 2 и 3 значения  $\lambda$

равны соответственно 2, 1 и 0,5. Для всех трех кривых величина  $\ell(\alpha)$  в окрестности близких к нулю значений  $\alpha$  мала, что связано с малостью телесного угла, включающего направления участков волокон, незначительно отличающихся от направления оси.

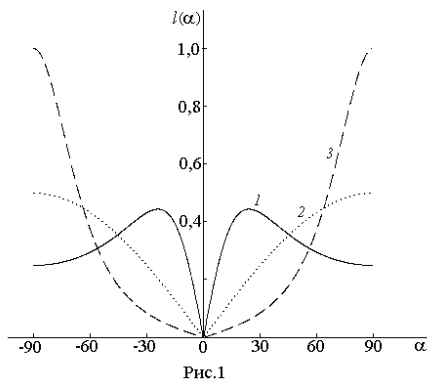


Рис. 1

В то же время телесный угол, охватывающий направления участков волокон, близких к  $\pi/2$ , в пределах изменения азимутального угла от 0 до  $2\pi$ , достаточно велик, что и обуславливает повышенные значения  $\ell(\alpha)$  в этой области.

При одноосном растяжении волокнистого материала (кривая 1 на графике рис.1 при  $\lambda > 1$ ) преимущественные направления ориентации участков волокон приближаются к направлению оси, а при сжатии (кривая 3 на графике рис. 1 при  $\lambda < 1$ ) – к направлению, перпендикулярному оси.

Анализ функции  $\ell(\alpha)$  показывает, что в точках  $\alpha = \pm\pi/2$  у нее наблюдается экстремум (максимум либо минимум) при любых значениях  $\lambda$ . Кроме того, при  $\lambda > \sqrt{3}/2$  у нее появляется дополнительный экстремум (максимум) в точках  $\alpha = \pm \arcsin \left[ 1/\sqrt{2(\lambda^2 - 1)} \right]$ , что и видно на графике рис.1 (для кривой 1 величина  $\lambda = 2$ ).

Функция плотности углового распределения для плоской структуры определяется уравнением (8) из [1], и воспроизводится здесь в форме

$$\ell(\alpha) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}. \quad (10)$$

Метод малоуглового рассеяния лазерного излучения [2] применительно к плоской структуре предполагает, что исследуемый образец располагается перпендикулярно к падающему лучу. В этом случае метод дает, как отмечалось ранее, ненормированную плотность распределения, определенную уравнением (10) с точностью до постоянного множителя. В случае осесимметричного материала он позволяет найти распределение проекций длин линейных элементов на нормальную к направлению луча меридиональную плоскость. Для того, чтобы связать угловое распределение проекций с плотностью распределения (6), необходимо связать длину элемента  $r$ , наклоненного под углом  $\beta$  к заданному направлению ( $\beta \equiv \alpha$ ) и расположенного под азимутальным углом  $\phi$  (рис. 2), с длиной проекции  $\ell$ , наклоненной в плоскости проекций под углом  $\psi$ .

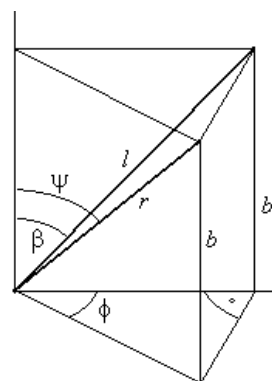


Рис. 2

Анализируя рис. 2, нетрудно заметить, что  $b = r \cos \beta$  и  $b = \ell \cos \psi$ , так что

$$\frac{\ell}{r} = \frac{\cos \beta}{\cos \psi}. \quad (11)$$

Кроме того, при помощи рис. 2 нетрудно найти связь между углами:

$$\operatorname{tg} \psi = \operatorname{tg} \beta \cos \phi. \quad (12)$$

Таким образом, с учетом тождества  $\alpha \equiv \beta$  вместо (6) получим

$$f(\beta, \phi, \psi) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda^2 \sin \beta}{\sqrt{(\lambda^2 \sin^2 \beta + \cos^2 \beta)^3}} \frac{\ell}{r}. \quad (13)$$

Подставляя (11) в (13) и осуществляя

$$f(\psi, \phi) = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda^2 \operatorname{tg} \psi \cos^2 \phi}{\cos \psi \sqrt{(\lambda^2 \operatorname{tg}^2 \psi + \cos^2 \phi)^3} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \psi + \cos^2 \phi}}. \quad (14)$$

Для того, чтобы получить угловое распределение проекций, как функцию угла наклона  $\psi$  к заданному направлению, необходимо проинтегрировать (14) по полному азимутальному углу.

Ввиду симметрии и четности функции  $f(\psi, \phi)$  по  $\phi$  достаточно вычисления интеграла в пределах первого квадранта от четвертого значения этой функции. В результате ряда подстановок [3] этот интеграл удается выразить через полные эллиптические интегралы Лежандра 1-го и 2-го рода [4].

Форма представления результатов интегрирования зависит от значения параметра  $\lambda$ . При  $\lambda < 1$  распределение длин проекций имеет вид:

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda^2}{\sqrt{\lambda^2 + (1 - \lambda^2) \cos^2 \psi}} \cdot \left[ \frac{1}{k^2} K(k^2) - \frac{1}{k^2} E(k^2) \right], \quad (15)$$

$$k^2 = \frac{(1 - \lambda^2) \cos^2 \psi}{\lambda^2 + (1 - \lambda^2) \cos^2 \psi}.$$

При  $\lambda > 1$  получено:

$$f(\psi) = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{\lambda^2 + (\lambda^2 - 1) \cos^2 \psi} \cdot \left[ \frac{1}{k^2} E(k^2) - \frac{1 - k^2}{k^2} K(k^2) \right], \quad (16)$$

$$k^2 = \frac{(\lambda^2 - 1) \cos^2 \psi}{\lambda^2}.$$

замену переменной  $\beta$  на  $\psi$  по уравнению (12) при фиксированном значении  $\phi$ , (13) преобразуем к виду

В этих формулах  $K(k^2)$  и  $E(k^2)$  – полные эллиптические интегралы Лежандра 1-го и 2-го рода соответственно, определенные как [3], [4]:

$$K(k^2) \equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta}},$$

$$E(k^2) \equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \vartheta} d\vartheta.$$

При значении  $\lambda = 1$ , соответствующем случаю недеформированного материала, функция  $f(\psi)$  постоянна:

$$f(\psi) = \frac{1}{4}.$$

Следует заметить, что функция  $f(\psi)$ , описывающая распределения длин проекций, не нормирована на 1 в отличие от плотностей углового распределения  $\ell(\alpha)$  для плоского (10) и осесимметричного (7) вариантов.

Сопоставление графиков функций  $f(\psi)$ , построенных по формулам (15) и (16), и функций  $\ell(\alpha)$ , построенных по формуле (10) при тех же значениях  $\lambda$ , показало, что эти графики близки по форме, несмотря на систематическое отличие представленных кривых.

В работе [1] отмечалось, что для плоского материала параметр распределения  $\lambda$  можно оценить на основании данных эксперимента по отношению значений ненормированной плотности распределения в точках 0 и  $\pi/2$ , а именно

$\lambda^2 = l'(0)/l'(\pi/2)$ , где  $l'(\alpha)$  – ненормированная функция плотности углового распределения, определяемая уравнением (10) с точностью до постоянного множителя.

Аналогичный параметр  $\lambda_0$  можно получить на базе эксперимента для осесимметричного материала:

$$\lambda_0^2 = \frac{f(0)}{f(\pi/2)}.$$

При значении  $\lambda < 1$  величина  $\lambda_0$  определяется при помощи формулы (15) как

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{4\lambda^3}{\pi(1-\lambda^2)} [K(\lambda^2) - E(\lambda^2)]}, \quad (17)$$

а при  $\lambda > 1$  – при помощи формулы (16) как

$$\lambda_0 = \sqrt{\frac{4\lambda^{-2}}{\pi} \left[ \frac{\lambda^{-2}}{\lambda^2-1} E(\lambda^{-2}) - \frac{1}{\lambda^2-1} K(\lambda^{-2}) \right]}. \quad (18)$$

При значении  $\lambda = 1$  оба параметра совпадают ( $\lambda = \lambda_0 \equiv 1$ ).

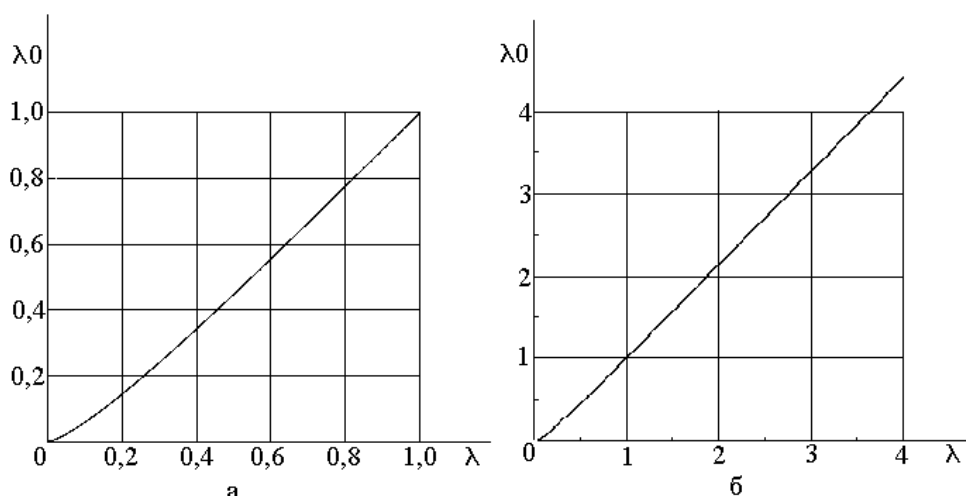


Рис. 3

На графиках рис. 3-а и 3-б представлена связь между параметрами  $\lambda$  и  $\lambda_0$  для двух областей соответственно  $0 < \lambda < 1$  и  $0 < \lambda < 4$ . Нетрудно заметить, что эти параметры близки между собой, хотя они и не совпадают.

Величина, характеризующая относительную разность этих параметров в форме

$$\delta\lambda = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0},$$

равна 0 при  $\lambda_0 = 1$ .

В практически важной области значений  $1 < \lambda_0 < 3$  величина  $\delta\lambda$  отрицательна и по модулю не превышает 0,04. При значениях  $\lambda_0 < 1$  при уменьшении  $\lambda_0$  величина  $\delta\lambda$  растет и достигает 0,3 при  $\lambda_0 \approx 0,2$ .

Таким образом, измерив на опыте значение параметра  $\lambda_0$  для тонкого осесим-

метричного материала, можно при помощи формул (15), (16) или графиков рис. 3 найти значение параметра распределения  $\lambda$ . При этом как плотность (7), (9), так и функция углового распределения (8) для осесимметричного образца становятся заданными.

В заключение отметим, что, хотя непосредственной экспериментальной проверки функции распределения для осесимметричной структуры не производилось, использование достоверного подхода, полностью оправдавшего себя для плоских материалов, дает основания полагать, что полученные результаты надежны.

## ВЫВОДЫ

Получены функция и плотность углового распределения элементов длин воло-

кон для осесимметричных волокнистых структур, а также указан способ нахождения параметра этого распределения по данным эксперимента.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Корнюхин И.П., Корнюхина Т.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2004, № 3.
2. Корнюхина Т.А., Борзунов И.Г. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1976, №3.

3. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т.П. – М.: Физматгиз, 1962.

4. Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовитца М. и Стиган И. – М.: Наука, 1979.

Рекомендована кафедрой промышленной теплоэнергетики. Поступила 28.11.05.

---