УДК 677.08:53

ПОТЕНЦИАЛ ОБЪЕМНО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ МАСС ТЕКСТИЛЬНЫХ ОТХОДОВ ПРИ ПОЛУЧЕНИИ ИЗ НИХ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ВОЛОКОН

В.Д. ФРОЛОВ, А.П. БАШКОВ, И.В. ФРОЛОВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

Связь между волокнами в текстильной структуре – пряже или ткани – определяется их сцепляемостью, то есть поверхностными силами трения, упругостью и извитостью. Эти свойства волокон являются определяющими при обеспечении качественного разволокнения текстильных структур.

Более точно состояние изотропной волокнистой массы в поле векторов действующих на нее сил можно описать, применяя теорию потенциалов, в частности, используя более тонкие их свойства в виде непрерывности потенциала объемно-распределенных масс и его частных производных первого порядка.

Используя известную формулу Остроградского, запишем ее для векторного поля $u(P)\ \mathrm{grad}_p v$ [1]:

$$\iiint\limits_{(V)} \mathrm{div}_p(u\,\mathrm{grad}_p v)dV_p = \iint\limits_{S}(u(P)\mathrm{grad}_p Vn)dS_p,$$

где (V) – некоторая конечная область пространства, ограниченная гладкой поверхностью (S) или несколькими поверхностями, а n – единичный вектор внешней нормали к (S); u и v – две произвольные функции.

Так как

$$\left(u(P)\,\mathrm{grad}pV_1 n\right) = u(P)\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_p,$$

$$\mathrm{div}_p\ \left(u\ \mathrm{grad}_p v\right) = \left(\mathrm{grad}_p u, \mathrm{grad}_p v\right) + u(P)\Delta_p v.$$

Отсюда

$$\iiint\limits_{(V)}(\mathrm{grad}_p u, \mathrm{grad}_p v)dV_p + = \iiint\limits_{(V)} u(P)\Delta_p v dV_p = \iint\limits_{S} u(P)\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_p dS_p\,. \quad (1)$$

После преобразования формулы (1) имеем

$$\iiint\limits_{(V)}\left\{u(P)\Delta_p v - v(P)\Delta_p u\right\}dV_p = \iint\limits_{S}\left\{u(P)\left(\frac{\partial v}{\partial n}\right)_p - v(P)\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_p\right\}dS_p\,. \quad (2)$$

Если граница области (S) состоит из нескольких замкнутых поверхностей, то каждая из них даст в правой части выражения (2) слагаемое того же вида, что и (S).

Возьмем любую точку A, лежащую внутри (V), и опишем вокруг нее сферу

(S_δ) малого радиуса δ, чтобы она помещалась внутри области (V), и обозначим через (W_δ) часть области (V), состоящую из точек, лежащих вне (S_δ).

Применим формулу (2) к области (W_δ) и функции $v(A,P)=\dfrac{1}{r_{AP}}$ при произвольной функции u.

Найдем оператор Лапласа в сферических координатах r, ϑ, φ; при этом $L = 1, L_\vartheta = r, L_\vartheta = r\sin\vartheta$

Тогда

$$\Delta v=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_{AP}}\left(r^2\frac{\partial v}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\upsilon\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \qquad (3)$$

Далее по формуле (3), выраженной через сферические координаты r_{AP}, ϑ, φ с началом в точке A, получаем

$$\Delta_p v=\frac{1}{r_{AP}^2}\frac{\partial}{\partial r_{AP}}\left(r_{AP}^2\frac{\partial v}{\partial r_{AP}}\right)+\frac{1}{r_{AP}^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\upsilon\frac{\partial v}{\partial\vartheta}\right)+\frac{1}{r_{AP}^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}. \qquad (4)$$

В связи с тем, что v зависит только от r_{AP}, то

$$\Delta_p v=\Delta p\left(\frac{1}{r_{AP}}\right)=\frac{1}{r_{AP}^2}\frac{\partial}{\partial r_{AP}}\left(r_{AP}^2\frac{\partial\frac{1}{r_{AP}}}{\partial r_{AP}}\right)=0. \qquad (5)$$

Выделим из равенства (5) функцию $\dfrac{c}{r_{AP}}$, где c – постоянная величина. Эта функция переменных A и P является решением уравнения Лапласа $\Delta_p u=0$.

Очевидно, что $\Delta_A\left(\dfrac{1}{r_{AP}}\right)=\Delta_p\left(\dfrac{1}{r_{AP}}\right)=0$.

Физически функция $\dfrac{c}{r_{AP}}$ представляет собой ньютонов потенциал материальной точки с массой C.

Если (V) – некоторая конечная область пространства, ограниченная кусочно-гладкой замкнутой поверхностью (S), а в области (V) задана функция ρ(P), которая предполагается непрерывной и ограниченной пределами (V), тогда пространственный интеграл

$$u(A)=\iiint\limits_V\frac{\rho(P)}{r_{AP}}dV_P \qquad (6)$$

является результатом непрерывного наложения, когда принцип наложения остается справедливым, и в том случае, если частных решений u_k имеется бесконечно много, а функция u представляется как ряд по u_k:

$$u=\sum_{k=1}^{\infty}c_k u_k. \qquad (7)$$

Или даже когда частные решения u_x зависят от непрерывно изменяющегося параметра x, а u представляется как интеграл по этому параметру:

$$u=\int c_x u_x dx, \qquad (8)$$

где c_x – произвольная функция от x.

Однако в этих случаях функция u и будет решением однородного линейного уравнения

$$L[u] = 0, \qquad (9)$$

только, если ряд (7) или интеграл (8) сходятся.

Решение $\frac{1}{r_{AP}}$ уравнения Лапласа, зависящего от параметров $\varsigma,\ \eta,\ \xi,\ \rho(P)$, играет роль коэффициентов, зависящих от тех же непрерывно изменяющихся параметров $\varsigma,\ \eta,\ \xi$.

В случае кусочно-непрерывной плотности $\rho(P)$ объем (V) распадается на конечное число объемов, внутри каждого из которых величина $\rho(P)$ непрерывна и ограничена. В этом случае соответствующий потенциал представляется в виде конечной суммы потенциалов типа (6).

Если (S) конечная гладкая поверхность, на которой задана непрерывная ограниченная функция $\rho(P)$, тогда интеграл (6) является результатом непрерывного наложения решения $\frac{1}{r_{AP}}$ уравнения Лапласа.

Вследствие этого функция $\rho(P)$ задана выражением

$$u(A) = \iint_{(S)} \frac{\rho(P)}{r_{AP}} dS_p\,, \qquad (10)$$

и является ньютоновым потенциалом масс, распределенных на (S) с поверхностной плотностью ρ.

Потенциал u(A) называется потенциалом простого слоя, а поверхность (S) – несущей поверхностью слоя. Потенциал простого слоя с кусочно-гладкой несущей поверхностью и кусочно-непрерывной плотностью представим в виде суммы конечного числа потенциалов с гладкими несущими поверхностями и непрерывными плотностями. Если несущая поверхность незамкнута, то мы вправе предположить, что она ограничена кусочно-гладкой кривой.

В точках A, не лежащих на (S), потенциал (10) является, очевидно, непрерывной функцией от A, любое число раз дифференцируемой по x, y, z под знаком интеграла.

В частности:

$$\begin{cases} \mathrm{grad}_A u = \iint_{(S)} \rho(P)\Delta_A\left(\frac{1}{r_{AP}}\right) dS_P = -\iint_{(S)} \rho(P)\Delta_A\left(\frac{r_{AP}}{r_{AP}^3}\right) dS_P, \\ \Delta_A u = \iint_{(S)} \rho(P)\Delta_A\left(\frac{1}{r_{AP}}\right) dS_P, \end{cases} \qquad (11)$$

то есть потенциал простого слоя удовлетворяет уравнению Лапласа во всех точках пространства, не лежащих на несущей поверхности слоя.

Исследуем поведение потенциала простого слоя на бесконечности так же, как и в случае объемно-распределенных масс:

$$\lim_{r\to\infty} ru(A) = \iint_{(S)} \rho(P) dS_P = M, \qquad (12)$$

то есть по всей массе, распределенной по (S), соблюдается неравенство

$$r^2 \left|\mathrm{grad}_A u\right| < \left(\frac{r}{r - r_0}\right)^2 \iint_{(S)} \left|\rho(P)\right| dS_P < 4\iint_{(S)} \left|\rho(P)\right| dS_P,$$

где r_0 – радиус сферы с центром в начале координат, содержащей всю несущую поверхность внутри себя, и в то же время $r > 2\,r_0$.

Таким образом, на бесконечности потенциал простого слоя ведет себя как потенциал материальной точки, расположенной в начале координат, причем сосредоточенная там масса равна всей массе, распределенной по (S).

Для частных производных первого порядка потенциала простого слоя имеют место (как и для потенциала объемно-распределенных масс) следующие неравенства:

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| < \frac{C}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right| < \frac{C}{r^2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial z}\right| < \frac{C}{r^2}, \qquad (13)$$

где C – некоторая постоянная.

Если несущая поверхность является поверхностью ограниченной кривизны, то она соответствует поверхности Ляпунова и потенциал существует в точках самого слоя, то есть сходится интеграл (10), когда точка A лежит на (S) и является непрерывной функцией во всем пространстве.

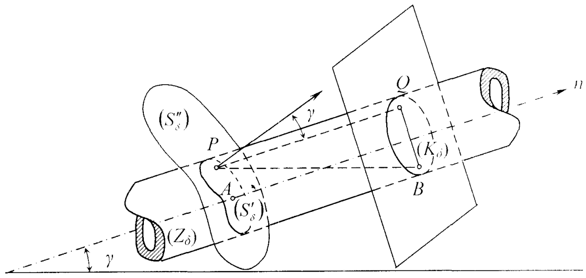

Рис. 1

Пусть точка A лежит на несущей поверхности или на ее границе (рис. 1). Проведем в A нормаль к (S) и опишем вокруг этой нормали, как оси, круговой цилиндр (Z_δ) достаточно малого радиуса δ. Цилиндр (Z_δ) вырежет на поверхности (S) некоторую часть $\left(S'_\delta\right)$, а оставшуюся часть обозначим $\left(S''_\delta\right)$.

В силу одного из условий Ляпунова δ можно выбрать настолько малым, чтобы $\left(S'_\delta\right)$ пересекалась с любой прямой, параллельной нормали к (S) в точке A, не более чем в одной точке. В силу другого условия выбором δ можно добиться и того, чтобы для угла γ между нормалью к (S) в точке A и в любой точке P на $\left(S'_\delta\right)$ выполнялось неравенство $\cos\gamma \geq \frac{1}{2}$.

Выберем любую точку B внутри (Z_δ) и оценим интеграл:

$$\iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{dS_P}{r_{BP}}. \qquad (14)$$

Для оценки интеграла проведем через B плоскость Д, перпендикулярную оси (Z_δ), и ортогонально спроектируем точку P с $\left(S'_\delta\right)$ на эту плоскость. Проекцией точки P является точка Q.

Тогда

$$r_{BP} \geq r_{BQ} \text{ и } dS_P = \frac{dS_Q}{\cos\gamma} \leq 2dS_Q.$$

Следовательно,

$$\iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{dS_P}{r_{BP}} \leq 2\iint\limits_{(K_\delta)} \frac{dS_Q}{r_{BQ}},$$

где (K_δ) – поверхность, получающаяся в сечении плоскостью Д цилиндра (Z_δ).

Тогда

$$\iint\limits_{(K_\delta)} \frac{dS_Q}{r_{BQ}} < \int\limits_0^{2\delta}\int\limits_0^{2x} dr d\varphi = 4\pi\delta.$$

Этот интеграл не превышает 2πδ, так как при смещении точки B на (K_δ) его наибольшее значение достигается, когда она совпадает с центром сечения (K_δ).

Следовательно, $\iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{dS_P}{r_{BP}} \leq 8\pi\delta$ независимо от положения точки B внутри цилиндра (Z_δ).

Отсюда следует, что несобственный интеграл $\iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{\rho(P)}{r_{AP}} dS_P$ сходится абсолютно, а так как ρ_m – наибольшее значение $|\rho(P)|$ на (S), то по предыдущей оценке имеем

$$\iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{|\rho(P)|}{r_{AP}} dS_P \leq \rho_m \iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{dS_P}{r_{AP}} \leq 8\pi\rho_m\delta. \qquad (15)$$

Значение потенциала простого слоя в точке А имеет вид:

$$u(A) = u'_\delta(A) + u''_\delta(A), \qquad (16)$$

где $u'_\delta(A) = \iint\limits_{(S'_\delta)} \frac{\rho(P)}{r_{AP}} dS_P$; $u''_\delta(A) = \iint\limits_{(S''_\delta)} \frac{\rho(P)}{r_{AP}} dS_P$.

Таким образом, прямое значение потенциала простого слоя существует во всех точках слоя, так как последнее выражение является собственным интегралом, а первое – сходящимся несобственным.

Для доказательства непрерывности функции u(A) во всем пространстве достаточно убедительно показать его непрерывность во всех точках слоя. Если А точка на (S) и A_1 точка в (Z_δ), тогда образуем разность

$$u(A_1) - u(A) = \left\{u'_\delta(A_1) - u'_\delta(A)\right\} + \left\{u''_\delta(A_1) - u''_\delta(A)\right\}. \qquad (17)$$

По приведенной оценке $\left|u'_\delta(A)\right| < 8\pi\rho_m\delta$ и $\left|u''_\delta(A)\right| < 8\pi\rho\delta$, что означает

$$\left|u'_\delta(A_1) - u'_\delta(A)\right| < 16\pi\rho_m\delta < \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad (18)$$

если выбрать $\delta < \frac{\varepsilon}{32\pi\rho_m}$, где $\varepsilon > 0$ – любое заданное число.

Выбрав δ, заметим, что потенциал $u''_\delta(A)$ заведомо непрерывен в точке А – как не лежащей на несущей поверхности слоя $\left(S''_\delta\right)$. Тогда для всех точек A_1, достаточно близких к А, должно выполняться неравенство

$$\left|u''_\delta(A_1) - u''_\delta(A)\right| < \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Таким образом, находим, что для всех точек A_1 из достаточно малой окрестности точки А:

$$\left|u(A_1) - u(A)\right| \le \left|u'_\delta(A_1) - u'_\delta(A)\right| + \left|u''_\delta(A_1) - u''_\delta(A)\right| < \varepsilon, \qquad (19)$$

то есть потенциал простого слоя непрерывен во всех точках слоя, а следовательно, и во всем пространстве.

ВЫВОДЫ

Доказана гипотеза о непрерывности потенциала объемно-распределенных масс текстильных отходов, что дает возможность рассматривать массу текстильного материала в процессе разволокнения как кусочно-непрерывную среду и применять к ней свойства изотропной среды, рассматривая поле векторов объемных и поверхностных сил как функцию (в виде полного дифференциала) координат и времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Фихтенгельц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Т.II. – М.: Гостехиздат, 1949.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 12.02.07.