УДК 687.021.531.36

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ПОЛОТНА В ОКРЕСТНОСТИ РАЗРЕЗА

Е.В. ПОЛЯКОВА, П.А. ДЯТЛОВА

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

На основе уравнений, полученных в [1] для изучения плоской деформации полотна, образующего оболочку, изучается ее напряженно-деформированное состояние вблизи отверстия, обусловленного разрезом. Предполагается, что разрез имеет длину достаточно малую, для того чтобы можно было при расчетах пренебречь искривленностью его окрестности. Предполагается также, что полотно имеет сетчатую структуру и образующие его нити практически не растяжимы в рассматриваемом диапазоне нагрузок.

Рассмотрим основные уравнения задачи о растяжении полотна в окрестности разреза и их общее решение.

Пусть прямоугольный кусок сетчатого полотна, пока он не деформирован, располагается на декартовой координатной плоскости xy так, что оси этой плоскости являются его осями симметрии и стороны ячеек параллельны этим осям. Присвоим точкам полотна лагранжевы координаты ξ и η, отождествив их значения со значениями декартовых координат этих точек при недеформированном состоянии полотна.

Сказанное позволяет считать, что до и после деформации рассматриваемый кусок полотна ограничен нитями с лагранжевыми координатами $\xi = \mp L$ и нитями с лагранжевыми координатами $\eta = \mp H$.

Будем также считать, что разрез этого куска произведен по нити $\xi = 0$ и заключен между нитями $\eta = \mp h$.

Предположим, что нити, которым соответствуют координаты $\xi = \text{const}$, растягиваются приложенными к их концам усилиями, плотность которых, рассчитанная на единицу длины кромки полотна, равна P. Аналогично относительно нитей, которым соответствуют координаты $\eta = \text{const}$, будем считать, что они растягиваются усилиями, плотность которых равна T.

Эти допущения позволяют считать, что положение и напряженно-деформированное состояние рассматриваемого куска полотна симметричны как относительно оси x, так и относительно оси y.

Вследствие этого ограничимся рассмотрением только того участка полотна, который расположен в первом квадранте плоскости xy.

Указанный участок состоит из двух частей. Левые кромки этих частей образованы нитью $\xi = 0$, а правые – нитью $\xi = L$. Первой будем называть ту часть, которая снизу и сверху ограничена соответственно нитями $\eta = h$ и $\eta = H$. Вторая часть снизу и сверху ограничена соответственно нитями $\eta = 0$ и $\eta = h$.

В [1] получены следующие уравнения равновесия рассматриваемой сетчатой ткани:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_{11}(\xi,\eta)\left(1+U_1'(\xi)\right)\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma_{22}(\xi,\eta)U_2'(\eta)\right)=0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_{11}(\xi,\eta)V_1'(\xi)\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma_{22}(\xi,\eta)\left(1+V_2'(\eta)\right)\right)=0, \quad (2)$$

где $U_1(\xi), U_2(\eta), V_1(\xi), V_2(\eta)$ – функции, определяющие перемещения точек ткани после ее деформации; σ_{11} и σ_{22} – плотности натяжения нитей $\eta = \text{const}$ и соответственно нитей $\xi = \text{const}$ в расчете на единицу длины контуров, пересекаемых этими нитями.

Как показано [1], горизонтальное и вертикальное перемещения точек первой части определяются равенствами:

$$u(\xi,\eta)=U_1(\xi), \quad v(\xi,\eta)=V_1(\xi). \quad (3)$$

Тогда уравнения (1) и (2) принимают вид:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_{11}^1(\xi,\eta)\left(1+U_1'(\xi)\right)\right)=0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_{11}^1(\xi,\eta)V_1'(\xi)\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma_{22}^1(\xi,\eta)\right)=0. \quad (5)$$

Здесь и ниже символы σ_{11}^i и σ_{22}^i при $i=1$ используются для обозначения напряжений в первой части ткани, а при $i=2$ – во второй.

Из (4) и (5) получим

$$\sigma_{11}^1=\frac{s(\eta)}{1+U_1'(\xi)}, \quad \sigma_{22}^1=-S(\eta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{V_1'(\xi)}{1+U_1'(\xi)}\right)+F(\xi), \quad S'(\eta)=s(\eta), \quad (6)$$

где $s(\eta)$ и $F(\xi)$ – произвольные функции своих аргументов.

Согласно постановке задачи должно выполняться граничное условие:

$$\sigma_{11}^1(L,\eta)\equiv\frac{s(\eta)}{1+U_1'(L)}=T, \quad (7)$$

из которого следует, что величина $s(\eta)$ постоянна.

Выразив ее значение через A, из (6) будем иметь:

$$\sigma_{11}^1(\xi,\eta)=\frac{A}{1+U_1'(\xi)},$$

$$\sigma_{22}^1(\xi,\eta)=-A\eta\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{V_1'(\xi)}{1+U_1'(\xi)}\right)+F(\xi). \quad (8)$$

Учитывая граничные условия на верхней кромке рассматриваемой части, на основе (8) получим:

$$\sigma_{22}^1(\xi,H)=-AH\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{V_1'(\xi)}{1+U_1'(\xi)}\right)+F(\xi)=P. \quad (9)$$

Из (8) и (9) имеем:

$$\sigma_{22}^1(\xi,\eta)=A(H-\eta)\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{V_1'(\xi)}{1+U_1'(\xi)}\right)+P. \quad (10)$$

Рассмотрим теперь вторую часть ткани, то есть часть, ограниченную нитями $\xi=0$, $\xi=L$, $\eta=0$, $\eta=h$ и прилегающую нижней кромкой к оси x, а левой кромкой – к краю отверстия, образованного разрезом.

Согласно [1] перемещения точек этой части равны:

$$u(\xi,\eta)=U_2(\eta), \quad v\nu(\xi,\eta)=V_2(\eta). \quad (11)$$

В результате из (1) и (2) получаем:

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_{11}^2(\xi,\eta)\right)+\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sigma_{22}^2(\xi,\eta)U_2'(\eta)\right)=0,\quad \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sigma_{22}^2(\xi,\eta)\left(1+V_2'(\eta)\right)\right)=0. \qquad (12)$$

Из (12) имеем:

$$\sigma_{11}^2(\xi,\eta)=-Q(\xi)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{U_2'(\eta)}{1+V_2'(\eta)}\right)+G(\eta),$$

$$\sigma_{22}^2(\xi,\eta)=\frac{q(\xi)}{1+V_2'(\eta)},\quad Q'(\xi)=q(\xi), \qquad (13)$$

где $q(\xi)$ и $G(\eta)$ – произвольные функции своих аргументов.

Определим напряжения в прямоугольном отрезке полотна с разрезом. Для определения произвольных функций, входящих в общие выражения для напряжений, нужно использовать граничные условия на левой и правой кромках второй части, а также геометрические и силовые условия сопряжения первой и второй частей на их общей границе.

Для того, чтобы получить эти условия, заметим, прежде всего, что кромка отверстия свободна от напряжений, а на правую кромку второй части, как и первой, действуют растягивающие напряжения $\sigma_{11}^2=T$, поэтому на основе (13) получаем уравнения

$$\sigma_{11}^2(0,\eta)=-Q(0)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{U_2'(\eta)}{1+V_2'(\eta)}\right)+G(\eta)=0,$$

$$\sigma_{11}^2(\xi,L)=-Q(L)\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{U_2'(\eta)}{1+V_2'(\eta)}\right)+G(\eta)=T. \qquad (14)$$

Из (14) и (13) получаем:

$$\sigma_{11}^2(\xi,\eta)=\frac{T\left(Q(0)-Q(\xi)\right)}{Q(0)-Q(L)}. \qquad (15)$$

Условия равенства перемещений, расположенных на общей границе первой и второй частей точек ткани, с учетом приведенных в [1] выражений для этих перемещений могут быть записаны в виде

$$U_1(\xi)=U_2(h),\quad V_1(\xi)=V_2(h). \qquad (16)$$

Из (16), учитывая, в частности, что точки первой части, имеющие лагранжеву координату $\xi=0$, не перемещаются, по условию, в горизонтальном направлении, заключаем, что

$$U_1(\xi)=U_1'(\xi)=U_2(h)=0,\quad V_1'(\xi)=0,\quad V_1(\xi)\equiv V_2(h). \qquad (17)$$

Отметим, что (17) с учетом (8) и (10) позволяет дать полное описание состояния первой части. Это состояние определяется формулами

$$u(\xi,\eta)=0,\quad v(\xi,\eta)=V_2(h),\quad \sigma_{11}^1(\xi,\eta)=T,\quad \sigma_{22}^1(\xi,\eta)=P, \qquad (18)$$

которые означают, что первая часть при растяжении ткани смещается вертикально, не деформируясь, на величину $V_2(h)$. При этом ее горизонтальные и вертикальные нити всюду натянуты постоянными усилиями T и P, соответственно.

Для того, чтобы записать уравнение, выражающее условие того, что первая и вторая части действуют друг на друга равными вертикальными усилиями, заметим, что поперечные нити второй части на ее границе с первой частью составляют с горизонталью угол $\gamma(\xi)$, который с учетом нерастяжимости нитей может вычисляться на основе равенства:

$$\sin\gamma(\xi)=\frac{\partial y(\xi,\eta)}{\partial \eta}\Big|_{\eta=h}=1+V_2'(h), \qquad (19)$$

где функция $y=y(\xi,\eta)=\eta+v(\xi,\eta)=$ $=\eta+V_2(\eta)$ выражает зависимость ординаты произвольной частицы второй части от лагранжевых координат этой частицы. Из (19) видно, что угол γ не зависит от ξ.

В силу (19), (18) и (13) равенство нормальных напряжений на обеих сторонах границы первой и второй частей выражается следующим образом:

$$P = \sigma_{22}^{2}(\xi, h)\sin\gamma = \sigma_{22}^{2}(\xi, h)\left(1 + V_{2}'(h)\right) = q(\xi). \tag{20}$$

Согласно (20) и (13), можем положить

$$Q(\xi) = P\xi. \tag{21}$$

Теперь, учитывая (13)…(17), видим, что напряжения внутри второй части определяются выражениями

$$\sigma_{11}^{2}(\xi, \eta) = \frac{T}{L}\xi, \quad \sigma_{22}^{2}(\xi, \eta) = \frac{P}{1 + V_{2}'(\eta)}. \tag{22}$$

ВЫВОДЫ

1. Получены и исследованы дифференциальные уравнения для определения напряжений и деформаций ткани в окрестности разреза.

2. Определены напряжения, возникающие в прямоугольном куске ткани, имеющем разрез, при симметричном растяжении этого куска.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полякова Е.В., Дятлова П.А.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, №2. С.133…136.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 23.01.07.