УДК 67.002.56; 67.001.4; 67:658.562; 67:658.62.018.012

ВЫБОР ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ТЕКСТИЛЬНЫХ МАТЕРИАЛОВ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ИГР

В.И. ЖУКОВСКИЙ, С.М. КИРЮХИН, С.Ф. ЛИТОВЧЕНКО

(Российский заочный институт текстильной и легкой промышленности)

Выбор номенклатуры и числа определяющих показателей являются первым и наиболее ответственным этапом работ в общей схеме оценки качества текстильных материалов. Известны различные методы выбора определяющих показателей качества продукции: эвристические, экспериментальные, вероятностные, стоимостные, смешанные и др., подробное описание которых применительно к текстильным материалам дано в [1].

Цель настоящей статьи заключается в том, чтобы показать возможность применения методов математической теории игр для выбора числа определяющих показателей качества текстильных материалов.

Постановка задачи сводится к следующему. При выборе числа n показателей качества необходимо, во-первых, учитывать затраты, связанные с ростом числа определяемых показателей, и, во-вторых, количество информации, приобретаемой при увеличении числа показателей. Именно при принятии решения следует, возможно, уменьшить затраты и одновременно увеличить информативность.

Будем использовать функцию затрат (expense) двух видов:
показательную:

$$s(n)=ae^{kn}-a, \qquad (1)$$

где постоянные a>0, k>1, и линейную:

$$s(n)=bn, \ (b\text{-}const>0). \qquad (2)$$

Информативность выразим функцией желательности (desirable) вида

$$i(n)=e^{-\frac{1}{n}}. \qquad (3)$$

Число показателей качества n может принимать конечное множество значений: n=1,2,…, N.

Далее будем предполагать, что на решение данной задачи инвестирована сумма C. Эта сумма ограничивает максимально возможное число показателей N следующим образом.

Утверждение. При заданной сумме инвестиций C для показательной функции затрат максимально возможное число показателей

$$N=\left[\frac{1}{k}\ln\frac{C+a}{a}-1\right], \qquad (4)$$

для линейной функции затрат число N есть

$$N=\left[\frac{C}{b}-1\right], \qquad (5)$$

где $[K]$ означает целую часть числа K.

Замечание. Имеет смысл рассматривать задачу, если максимальное число показателей N>1. Установим ограничения на инвестиции C, при которых N>1.

Утверждение. Требование N>1 имеет место для показательной функции затрат, если

$$C>ae^{2k}-a,$$

для линейной функции затрат, если

$$C>2b.$$

Замечание. Пусть поступила инвестиция C. Для показательной функции затрат целое число N определяется по формуле (4), и диапазон изменения количества показателей n становится

$$n\in\left[1,\ N=\left[\frac{1}{k}\ln\frac{C+a}{a}-1\right]\right]=\mathbf{N},$$

для линейной функции затрат

$$n\in\left[1,\ N=\left[\frac{C}{b}-1\right]\right]=\mathbf{N}.$$

При этом число показателей n может принимать значения: n=1, 2, …, N.

Перейдем к формальной постановке задачи. Заданы функции стоимости s(n) (вида (1) или (2)) и желательности i(n) (вида (3)), определенные на дискретном множестве $\mathbf{N}=\{1,...,N\}$. Требуется найти целое число $n^*\in N$, при котором стоимость s(n) принимала бы возможно меньшее и одновременно информативность i(n) возможно большее значения.

Для решения этой задачи используем результаты из теории антагонистических игр с векторной функцией выигрыша [2].

Будем теперь считать, что множество определения функций s(n) и i(n) представляет собой сплошной отрезок $\mathbf{N}=[1,N]$ на

числовой оси. Будем также применять множества значений:
для функции (1):

$$S = [s(1), s(N)] = [\ a(e^k - 1), a(e^{kN} - 1)\ ], \quad (6)$$

$$S = [s(1), s(N)] = [b, bN], \quad (7)$$

для функции (2),

$$I = [i(1), i(N)] = \left[e^{-1}, e^{-\frac{1}{N}}\right]. \quad (8)$$

для функции (3).

Используем следующий факт: функции (1), (2) и (3) непрерывны и монотонно возрастают на **N**, то есть при любых $n_j \in$ **N** ($j=1,2$) и $n_1<n_2$ будет $s(n_1)<s(n_2)$, $i(n_1)<i(n_2)$.

Отсюда, из [3, с. 172] и вида функций (1)…(3) следует.

Утверждение.

1) Множества S и I из (6)…(8) выпуклы, замкнуты и ограничены (выпуклые компакты);

2) для функции (1)…(3), определенных на **N**, существуют обратные, которые непрерывны, монотонно возрастают:

3) обратная к (1) функция $f_1(s)$ определена на S из (6) и имеет вид

$$n = f_1(s) = \frac{1}{k}\ln\frac{s+a}{a},$$

уменьшение $f_1(s)$ на **N** влечет уменьшение $f_1(s)$ на S из (6) и обратно и

$$\min_{n\in N} s(n) = s(1) = a(e^k - 1),$$

$$\min_{s\in S} f_1(s) = f_1(a(e^k - 1)) = 1;$$

4) обратная к (2) функция определена на S (из (7)) и имеет вид

$$n = f_1(s) = \frac{s}{b}, \quad (9)$$

уменьшение s(n) на **N** эквивалентно уменьшению $f_1(s)$ на указанном S и

$$\min_{n\in N} bn = s(1) = b,$$

$$\min_{s\in S} f_1(s) = f_1(b) = 1;$$

5) обратная к (3) функция определена на I (из (8)) и имеет вид

$$n = f_2(i) = -\frac{1}{\ln i}, \quad (10)$$

увеличение i(n) на N равносильно увеличению $f_2(i)$ на I и

$$\max_{n\in N} i(n) = i(N) = e^{-\frac{1}{N}},$$

$$\max_{i\in I} f_2(i) = f_2(e^{-\frac{1}{N}}) = N.$$

Приведем необходимые сведения из теории антагонистических игр с двухкомпонентной функцией выигрыша, которая задается упорядоченной тройкой:

$$< I, S, f(i,s) >, \quad (11)$$

где $f=(f_1, f_2)$.

В игре (11) "игрок" 1, выбирает свою стратегию $i \in I$ таким образом, чтобы обе компоненты $f_j(i,s)$ $(j=1,2)$ функции выигрыша $f_j(i,s)$ принимали бы возможно большие значения; "игрок" 2 стремится наоборот – уменьшить эти же компоненты за счет подходящего выбора своей стратегии $s \in S$. Оба "игрока" производят такой выбор независимо и одновременно.

При формализации оптимального решения такой игры будем использовать понятие седловой точки (из теории антагонистических игр) и понятия векторных оптимумов (из теории многокритериальных задач). Для этого игре (11) поставим в соответствии две двухкритериальные задачи:

$$\left\langle I, f(i, s^P) = (f_1(i, s^P), f_2(i, s^P))\right\rangle, \quad (12)$$

$$\left\langle S, f(i^P, s) = (f_1(i^P, s), f_2(i^P, s))\right\rangle. \quad (13)$$

Альтернативу $i^P \in I$ называют [4, с. 31…32] максимальной по Парето в (12), если при любых $i \in I$ несовместна система неравенств:

$$f_j(i, s^P) \geq f_j(i^P, s^P)\ (j = 1,2),$$

из которых, по крайней мере, одно строгое. Такую операцию обозначаем

$$\underset{i \in I}{\mathrm{MAX}}\, f(i, s^P) = f(i^P, s^P).$$

Аналогично, $s^P \in S$ назовем минимальной по Парето в задаче (13), если при любых $s \in S$ несовместна система неравенств:

$$f_j(i^P, s) \leq f_j(i^P, s^P)\ (j = 1,2),$$

из которых хотя бы одно строгое; обозначаем такую операцию

$$\underset{s \in S}{\mathrm{MIN}}\, f(i^P, s) = f(i^P, s^P).$$

Пара $(i^P, s^P) \in I \times S$ называется [2, с.175] седловой точкой по Парето игры (11), если

$$\underset{i \in I}{\mathrm{MAX}}\, f(i, s^P) = f(i^P, s^P) = \underset{s \in S}{\mathrm{MIN}}\, f(i^P, s).$$

Привычным для теории многокритериальных задач [4] приемом устанавливается справедливость следующего положения.

Утверждение. Если для игры (11) существует пара $(i^P, s^P) \in I \times S$ и числа $\alpha_j > 0 (j = 1,2)$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ такие, что

$$\max_{i \in I}\left[\alpha_1 f_1(i, s^P) + \alpha_2 f_2(i, s^P)\right] = \alpha_1 f_1(i^P, s^P) + \alpha_2 f_2(i^P, s^P) = \min_{s \in S}\left[\alpha_1 f_1(i^P, s) + \alpha_2 f_2(i^P, s)\right],$$

то (i^P, s^P) будет седловой точкой по Парето.

Формула минимизации числа показателей качества выводится следующим образом. В качестве математической модели предложенной задачи будем рассматривать антагонистическую игру с двухкомпонентной функцией выигрыша

$$\left\langle I, S, f(i, s) = (f_1(s), f_2(i)) \right\rangle, \qquad (14)$$

элементы которой $I, S, f_1(s), f_2(i)$ определены соответственно в (6)…(10). В этой игре (14) "игрок" 1 за счет выбора $i \in I$ стремится увеличить, а "игрок" 2 выбором $s \in S$ – уменьшить одновременно обе компоненты векторной функции выигрыша $f(i, s)$. При этом оба "игрока" такой выбор производят одновременно и независимо.

Применение к игре (14) приведенных выше утверждений приводит к следующему результату.

Утверждение. Число показателей n*, соответствующее седловой точке по Парето в игре (14), определяется формулой

$$n^* = n(i^P, s^P) = \frac{1 + N}{2}, \qquad (15)$$

где число N в случае показательной функции затрат задано в (4), в случае линейной функции – в (5).

Из утверждения (15) в качестве следствия получаем, что число показателей n^*, оптимально сочетающих требование снижения затрат и одновременного увеличения информативности при заданной инвестиции C в случае показательной функции затрат $s(n) = ae^{kn} - a$, определяется формулой

$$n^* = \left[\frac{1}{2k} \ln \frac{C + a}{a}\right], \qquad (16)$$

в случае линейной функции затрат $s(n) = bn$:

$$n^* = \left[\frac{C(n)}{2b}\right]. \qquad (17)$$

Объединение полученных выше результатов приводит к следующему алгоритму нахождения числа показателей n^*, оптимально сочетающего требование снижения затрат и одновременного увеличения информативности (при заданной инвестиции C в проекте).

Прежде всего следует проверить, чтобы инвестиции C удовлетворяли неравенствам

$$C > ae^{2k} - a,$$

в случае показательной функции затрат

$$s(n) = ae^{kn} - a,$$

и

$$C > 2b,$$

в случае линейной функции затрат $s(n) = bn$.

Затем число показателей n^*, оптимально сочетающее требование снижения затрат с одновременным увеличением информативности, необходимо найти по формуле

$$n^* = \left[\frac{1}{2k}\ln\frac{C+a}{a}\right], \qquad (18)$$

в случае показательной функции затрат, и

$$n^* = \left[\frac{C}{2b}\right], \qquad (19)$$

в случае линейной функции затрат.

Приведенные выше теоретические выкладки выбора показателей качества методами математической теории игр представляют интерес для практического применения при решении основополагающих проблем квалиметрии текстильных материалов. Последнее обусловлено тем, что эти проблемы всегда являются сложной компромиссной задачей, в основе которых лежит "конфликтная ситуация" двух "игроков", оптимизирующих свои взаимоотношения. Например, оценка качества, когда изготовитель (поставщик) предлагает одни значения определяющих показателей, а потребитель (заказчик) выставляет собственные требования.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Соловьев А.Н., Кирюхин С.М.* Оценка и прогнозирование качества текстильных материалов. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

2. *Zhukovskiy V.I., Salukvadze M.E.* The Vector-Valued Maximin. N.Y. etc.: Academic Press, 1994.

3. *Фихтенгольц Г.М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Физматиз, т.1, 1962.

4. *Подиновский В.В., Ногин В.Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982.

Рекомендована кафедрой материаловедения. Поступила 26.10.06.