

УДК 677.017.427:539.3

**АНАЛИТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЯВЛЕНИЙ
ПРИ РАЗРУШЕНИИ ПРЯЖИ***

В. П. ЩЕРБАКОВ, Н. С. СКУЛАНОВА

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина)

В настоящей статье рассматривается расчет прочности пряжи в зависимости от крутки, основанный на сравнительно недавно разработанном аналитическом методе проектирования пряжи без привлечения эмпирических связей [1...3]. При простейшем теоретическом исследовании поведения волокон в нити с идеальной винтовой структурой учитываются только продольные растягивающие силы и считается неизменным диаметр нити при растяжении.

Деформации волокна ε_f и нити ε_y связаны между собой соотношением $\varepsilon_f = \varepsilon_y \cos^2 \vartheta$, где ϑ – угол ориентации отдельного волокна относительно оси нити, изменяющийся вдоль радиуса r .

На поверхности нити радиуса R угол ϑ равен углу кручения β . Осевое напряжение в нити получаем как усреднение напряжений и ориентации каждого волокна:

$$\sigma_y = \left\langle \sigma_f \frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \varepsilon_y} \right\rangle.$$

Полагаем, что деформирование волокон следует закону Гука.

Конечно, связь между напряжением и деформацией волокон явно нелинейная, но, принимая во внимание, что нас в данном случае интересует разрушение волокон и, как следствие, разрушение нити, не имеет значения, по какой кривой достигается предел прочности волокна. Тогда уп-

ругий модуль $E_y = \langle E_f \cos^4 \vartheta \rangle$, а после усреднения – $E_y = E_f \cos^2 \beta$.

Разрушение нити начинается с разрыва волокон. Предел прочности волокна при растяжении определяется соотношением $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*}$. Здесь и далее звездочкой обозначены величины, относящиеся к предельному состоянию. Деформация волокон уменьшается пропорционально $\cos^2 \vartheta$ в радиальном направлении нити от $\varepsilon_f = \varepsilon_y$ до $\varepsilon_f = \varepsilon_y \cos^2 \beta$. Максимальная деформация возникает в центральных волокнах и равна деформации нити.

Максимальное напряжение, или предел прочности при растяжении, центральных волокон, которые первыми разрываются и затем инициируют разрушение нити, $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{f*}$ или $\sigma_{f*} = E_f \varepsilon_{y*}$. Напряжение в нити при той же деформации ε_{y*} определяется выражением $\sigma_{y*} = E_y \varepsilon_{y*}$.

Отсюда следует, что отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю упругости волокна. В простейшем случае, не учитывающем ни изменения диаметра нити, ни действия поперечных сил, предел прочности нити определяется формулой $\sigma_{y*} = \sigma_{f*} \cos^2 \beta$.

* Начало.

В опытах непосредственно измеряемой характеристикой является не напряжение, а величина нагрузки на нить или волокно.

Предполагая возможность получения экспериментальных данных прочности волокон, построим уравнения, записанные через силы натяжения. Для такой сложной системы задача решается намного проще при помощи энергетических соотношений.

Рассматривая нить как механическую консервативную систему, запишем:

$$A = T + U,$$

где A – работа внешних сил; T – кинетическая энергия движения; U – потенциальная энергия деформации.

Для того, чтобы вычислить U , предположим, что внешняя сила P прикладывается достаточно медленно, и кинетической энергией можно пренебречь. Получим $A=U$.

На элементарном перемещении $d(\Delta L)$ работа внешней силы P в направлении оси нити при прочих неизменных перемещениях равна приращению потенциальной энергии деформации всех m волокон:

$$Pd(\Delta L) = \sum_1^m dU_f.$$

Преобразуем написанное соотношение:

$$P = \sum_1^m \frac{\partial U_f}{\partial(\Delta L)} = \sum_1^m \frac{\partial U_f}{\partial(\Delta \ell_f)} \frac{\partial(\Delta \ell_f)}{\partial(\Delta L)}.$$

Здесь $\frac{\partial U_f}{\partial(\Delta \ell_f)}$ представляет собой

натяжение волокна P_f , а $\frac{\partial(\Delta \ell_f)}{\partial(\Delta L)}$ – соотношение между деформациями волокна и нити.

Напишем известные выражения $\Delta \ell_f = \varepsilon_f \ell_f$ и $\Delta L = \varepsilon L$.

С учетом $L = \ell_f \cos \vartheta$ и $\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \varepsilon_y} = \cos^2 \vartheta$

получим:

$$P = m \bar{P}_f \langle \cos \vartheta \rangle. \quad (1)$$

$$\text{Здесь } \langle \cos \vartheta \rangle = \frac{2 \cos \beta (1 - \cos \beta)}{\sin^2 \beta} - \text{ус-}$$

редненный косинус угла ориентации ϑ каждого волокна.

В 1926 г. Ф. Пирс впервые сформулировал концепцию наислабейшего звена при исследовании прочности хлопковых волокон. Зависимость средней прочности от длины волокна ℓ определяется формулой

$$\bar{P}(\ell) = P_m \left(\frac{\ell_0}{\ell} \right)^{\frac{1}{\alpha}} \Gamma \left(1 + \frac{1}{\alpha} \right). \quad (2)$$

Она содержит две константы – два параметра P_m и α распределения Вейбулла, а выделение характерной длины ℓ_0 предоставляет определенные удобства для решения конкретных задач; это может быть длина $\ell_0=10$ мм стандартного образца при испытаниях волокон. Параметр распределения P_m характеризует модальное значение прочности, а второй параметр α определяет структурные особенности материала.

Концепция наислабейшего звена может быть изменена: более не предполагается, что повреждение критического размера приводит к разрушению всей нити, а считается, что критическое повреждение может быть остановлено прежде, чем оно разрастется от локального масштаба до масштаба всей нити. Такой процесс возможен, если предположить, что наислабейший элемент объема окружен волокнами с настолько большой локальной прочностью, что напряжение наислабейшего элемента может после его разрушения быть воспринятым окружающими волокнами.

Построение модели процесса разрушения, основанное на изложенном представлении, приводит к концепции классического пучка, в соответствии с которой прочность нити всегда оказывается ниже средней прочности волокон и определяется ко-

эффицентом реализации средней прочно-сти волокон в нити:

$$k = \frac{(\alpha e)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}$$

До сих пор были приведены основные положения теории прочности нити, образованной непрерывными волокнами. Более подробно эта теория изложена в книге [1] и в работах авторов. Рассмотренная модель нити не вполне отражает реальную структуру пряжи, формируемой из волокон конечной длины.

Отклонения вызывает сама технология нити, когда нить, состоящая из системы параллельных волокон, преобразуется в крученую структуру, в которой наружные волокна длиннее центральных. Геометрическая совместимость волокон в процессе кручения достигается не столько за счет растяжения волокон, хотя это, безусловно, имеет место, сколько сменой положения частей волокон относительно оси нити таким образом, чтобы на большом протяже-

нии пряжи длины траекторий волокон были бы одинаковыми (рис. 1). Этот эффект называют миграцией волокон.

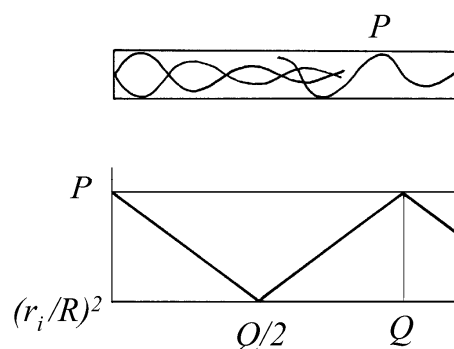


Рис. 1

Концы волокон конечной длины (будем их называть короткими волокнами) не закреплены, и натяжение на концах должно равняться нулю. Благодаря взаимодействию с соседними волокнами натяжение возрастает от нуля до уровня, при котором проскальзывания нет, то есть до максимального напряжения σ_f в непрерывном волокне.

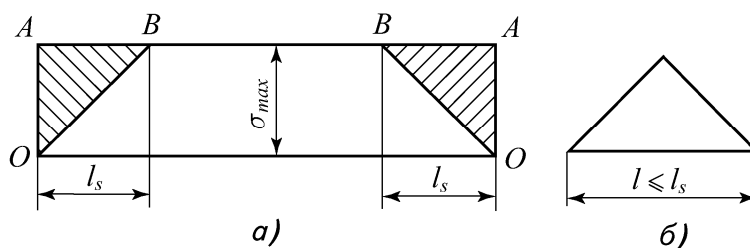


Рис. 2

Распределение растягивающего усилия в волокне длины l будет таким, как это показано на рис. 2-а. При дальнейшем нагружении возможен разрыв в той средней части, где напряжение максимально. В пряже, образованной короткими волокнами, возникает скольжение, начинающееся от концов волокон. В механике волокнистых композитов длина l_s концевой части волокна, на которой напряжение уменьшается от σ_f до нуля, называется неэффективной длиной. Длина $l_{кр} = 2l_s$, передающая

усилие соседним волокнам, является критической длиной, к которой может быть применена изложенная выше теория.

Если $l \leq l_s$, график распределения усилия будет соответствовать рис. 2-б. Для $l \geq l_s$ система волокон является самоуплотняющейся, то есть чем сильнее натяжение, тем сильнее поперечное обжатие. Если же $l < 2l_s$, то защемление волокон отсутствует и волокна скользят одно относительно другого. Влияние проскальзывания определится из соотношения

$$КП = \frac{\text{среднее натяжение с проскальзыванием}}{\text{среднее натяжение без проскальзывания}} = \frac{\text{площадь ОВВО}}{\text{площадь ОААО}}.$$

Рассмотрим напряжения, деформации и предельное состояние пряжи из волокон конечной длины с регулярной схемой миграции [1]. Введем обозначения: r - радиальное расстояние от оси волокна до оси нити; R - радиус нити; ℓ - дуговая координата точки M на волокне, равная расстоянию от начала отсчета до точки, измеренному вдоль волокна; L - длина координаты ℓ на поверхности нити; $u = \frac{1}{L}$ - параметр, характеризующий радиальное положение точки на волокне в нити.

Параметры u и r связаны соотношением

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{u^2 - \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta}. \quad (3)$$

Примем точку P (рис. 3), расположенную на поверхности нити, за начало отсчета дуговой координаты точки M на мигрирующем i -м волокне.

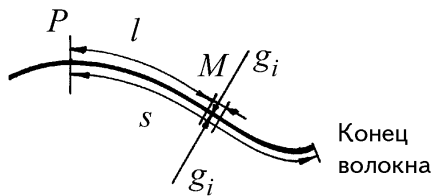


Рис. 3

Волокно мигрирует внутри пряжи в соответствии с выражением

$$\left(\frac{r_i}{R}\right)^2 = 1 - \frac{2\ell_i}{Q} \quad (4)$$

где ℓ_i - дуговая координата точки M на i -м волокне; r_i - соответствующее значение r ; Q - длина волны миграции.

Из (3) и (4) получим

$$\ell_i = \frac{Q}{2} \left(1 - \frac{u_i^2 - \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \right). \quad (5)$$

После дифференцирования найдем элемент $d\ell_i$, на который наложены касательные напряжения, вызванные силами трения взаимодействующих волокон и препятствующие скольжению волокон:

$$d\ell_i = -\frac{Q}{2} \left(\frac{2u_i}{1 - \cos^2 \beta} \right) du. \quad (6)$$

Рассчитаем максимальное напряжение, которое может возникнуть в точке P под действием сил трения, обусловленных сопротивлением скольжению волокон. На волокно помимо растягивающего напряжения σ_f действует поперечное напряжение g_i , обусловленное пространственной формой растянутого волокна.

На поверхность волокна длиной $d\ell_i$ и радиуса a действует элементарная сила трения:

$$df = \mu g_i (2\pi a d\ell_i). \quad (7)$$

Суммарная сила f_s , препятствующая скольжению на расстоянии s от конца волокна:

$$f_s = \int_0^s \mu g_i (2\pi a) d\ell_i. \quad (8)$$

Но на элемент $d\ell_i$ действует и растягивающее усилие $\pi a^2 \sigma_s$. Нормальное растягивающее напряжение в точке P задается соотношением

$$\sigma_s = \frac{\mu 2\pi a}{\pi a^2} \int_0^s g_i d\ell_i = \frac{2\mu}{a} \int_0^s g_i d\ell_i. \quad (9)$$

Поперечные напряжения равны тем напряжениям, которые имеются в соответствующих нитях из бесконечных волокон:

$$g_i = \sigma_f \cos^2 \beta \frac{(1-u_i^2)}{2u_i^2}. \quad (10)$$

Подставим равенство (10) в формулу (9) и с учетом дифференциала (6) получим:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \frac{2\mu}{a} \int_1^{u_s} \sigma_f \cos^2 \beta \frac{1-u_i^2}{2u_i^2} \left(-\frac{Qu_i}{1-\cos^2 \beta} \right) du_i = \\ &= \sigma_f \mu \cos^2 \beta \frac{Q}{a(1-\cos^2 \beta)} \int_1^{u_s} \left(u_i - \frac{1}{u_i} \right) du_i. \end{aligned} \quad (11)$$

После интегрирования имеем

$$\sigma_s = \sigma_f \mu \cos^2 \beta \frac{Q}{a(1-\cos^2 \beta)} \left\{ -(1-\cos^2 \beta) \frac{s}{Q} - \frac{1}{2} \ln \left[1 - 2(1-\cos^2 \beta) \frac{s}{Q} \right] \right\}. \quad (12)$$

Учтем, что $\ell_s \ll Q$, разложим $\ln(1-x)$ в ряд и получим

$$\sigma_s = \frac{2\ell_s^2}{aQ} [\sigma_f \mu \cos^2 \beta (1-\cos^2 \beta)]. \quad (13)$$

По мере увеличения длины участка скольжения ℓ_s напряжение σ_s возрастает до тех пор, пока при $\ell = \ell_s$ оно достигнет напряжения, необходимого для защемления волокна и деформирования нити.

Приняв во внимание формулу $\sigma_s = \sigma_y = \sigma_f \cos^2 \beta$, получаем соотношение

$$\begin{aligned} \sigma_m &= \frac{1}{L_f} \left\{ 2 \int_0^{\ell_s} \left[2\sigma_f \mu \cos^2 \beta \frac{(1-\cos^2 \beta)}{aQ} \right] \ell^2 d\ell + (L_f - 2\ell_s) \sigma_f \cos^2 \beta \right\} = \\ &= \sigma_f \cos^2 \beta \left\{ 1 - \frac{2}{3L_f} \left[\frac{aQ}{2\mu(1-\cos^2 \beta)} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если сравнить σ_m , полученное по формуле (15), с напряжением в волокне на поверхности нити из бесконечно длинных волокон $\sigma_y = \sigma_f \cos^2 \beta$, то можно положить, что второй член формулы (15) в фигурных скобках является коэффициентом скольжения и характеризует уменьшение напряжения в нити из коротких волокон:

$$\begin{aligned} \sigma_s &= \left[\sigma_f \mu \cos^2 \beta \frac{Q}{a(1-\cos^2 \beta)} \right] \cdot \\ &\cdot \left[\frac{1}{2}(u_s^2 - 1) - \ln u_s \right]. \end{aligned}$$

Определим из выражения (4) $u_s^2 = 1 - 2(1-\cos^2 \beta) \frac{s}{Q}$ и подставим в предыдущее выражение:

ние, определяющее длину участка скольжения:

$$\ell_s = \sqrt{\frac{aQ}{2\mu(1-\cos^2 \beta)}}. \quad (14)$$

При $\ell_s \geq \ell$ напряжение в волокне определяется сопротивлением скольжению волокна и вычисляется по формуле (12); при $\ell > \ell_s$ напряжение равно σ_y .

Если L_f - длина волокна, то, учитывая наличие участков проскальзывания и защемления, усредним напряжения, действующие на всей длине волокна:

$$k_c = 1 - \frac{2}{3L_f} \left[\frac{aQ}{2\mu(1-\cos^2 \beta)} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (16)$$

Распространим полученный результат на весь объем нити, приняв во внимание соотношение

$$\frac{\sigma_{y^*}}{\sigma_{f^*}} = \frac{E_y}{E_f} = \cos^2 \beta,$$

и получим окончательное выражение, которое лежит в основе построения расчетных формул прочности пряжи:

$$\frac{\sigma_{y^*}}{\sigma_{f^*}} = \cos^2 \beta \left\{ 1 - \frac{2}{3 \sin \beta L_f} \left[\frac{aQ}{2\mu} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}. \quad (17)$$

Формула (17) включает в себя основные структурные параметры пряжи, в том числе и крутку; множитель в фигурных скобках характеризует механизм скольжения волокон, в соответствии с которым проскальзывание снижается с увеличением

длины волокна L_f , его тонины a , коэффициента трения μ и возрастает с ростом миграции Q .

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S.* Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. New York, 1969.
2. *Щербаков В.П.* Прикладная механика нити. – М.: РИО МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.
3. *Щербаков В.П., Скуланова Н.С., Полякова Л.В.* Аналитическое описание процессов деформирования и разрушения пряжи // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1999, № 3, 4.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 16.04.07.