

УДК 677.11.620.1

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ С ГИБКОЙ НИТЬЮ

С.В. БОЙКО, А.Г. ГРИШИН

**(Костромской государственный технологический университет,
Всероссийский научно-исследовательский институт по переработке лубяных культур)**

Одним из направлений повышения эффективности процесса трепания льна является улучшение условий взаимодействия обрабатываемых волокнистых прядей с билом. Существующие модели взаимодействия пряди волокна и била не позволяют осуществить полноценный кинематический и силовой анализ указанного взаимодействия в условиях больших перемещений била [1] и непрямолинейных

форм участков пряди [2]. В связи с этим необходим поиск принципиально иных подходов для моделирования взаимодействия била и пряди волокна при трепании.

Предлагается метод, предусматривающий любые перемещения била и не имеющий ограничений по прямолинейности участков пряди. Метод основан на общеизвестном положении, что система $N+1$ материальных точек, соединенных N не-

сомыми растяжимыми стержнями, при $N \rightarrow \infty$ и пропорциональном уменьшении длины стержней и массы грузов моделирует идеально гибкую растяжимую нить [3].

В [4] предложена следующая система уравнений движения идеально гибкой, линейно растяжимой нити в двумерном пространстве:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial S_0} \left(\frac{T_1}{f_1} \frac{\partial X_1}{\partial S_0} \right) &= \frac{\partial^2 X_1}{\partial t^2} \\ \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial S_0} \left(\frac{T_1}{f_1} \frac{\partial Y_1}{\partial S_0} \right) &= \frac{\partial^2 Y_1}{\partial t^2} \end{aligned} \right. , \quad (1)$$

$$T_1 = ES(f_1 - 1), \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial X_1}{\partial S_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial Y_1}{\partial S_0} \right)^2 = f_1^2. \quad (3)$$

При замене пространственной производной конечно-разностным аналогом эта

$$\left. \begin{aligned} m_0 \frac{d^2 X_0}{dt^2} &= ES \left(\frac{\ell_{0,1}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(X_1 - X_0)}{\ell_{0,1}}, \\ m_0 \frac{d^2 Y_0}{dt^2} &= ES \left(\frac{\ell_{0,1}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(Y_1 - Y_0)}{\ell_{0,1}}, \\ \dots \dots \dots \\ m_i \frac{d^2 X_i}{dt^2} &= ES \left(\frac{\ell_{i-1,i}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(X_{i-1} - X_i)}{\ell_{i-1,i}} + ES \left(\frac{\ell_{i,i+1}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(X_{i+1} - X_i)}{\ell_{i,i+1}}, \\ m_i \frac{d^2 Y_i}{dt^2} &= ES \left(\frac{\ell_{i-1,i}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(Y_{i-1} - Y_i)}{\ell_{i-1,i}} + ES \left(\frac{\ell_{i,i+1}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(Y_{i+1} - Y_i)}{\ell_{i,i+1}}, \quad i = 0 \dots N, \\ \dots \dots \dots \\ m_N \frac{d^2 X_N}{dt^2} &= ES \left(\frac{\ell_{N-1,N}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(X_{N-1} - X_N)}{\ell_{N-1,N}}, \\ m_N \frac{d^2 Y_N}{dt^2} &= ES \left(\frac{\ell_{N-1,N}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(Y_{N-1} - Y_N)}{\ell_{N-1,N}}, \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

где $X_i(t), Y_i(t)$ – декартовы координаты i -й точки, а m_i – ее масса; t – время.

Для получения разностной схемы системы (4) введем равномерную сетку по времени и заменим ее производную раз-

система редуцируется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений (4), которая описывает движение $N+1$ материальных точек, соединенных N связями-стержнями. Показан и обратный процесс, когда при $N \rightarrow \infty$ система (4) переходит в систему (1)...(3), представляющую модель идеальной нити.

Правая часть уравнений содержит сумму двух сил упругости, которые действуют на i -ю материальную точку со стороны соседних стержней (для нулевой и последней точки – сила одна). E – модуль Юнга; S – площадь поперечного сечения нити; $\left(\frac{\ell_{i,i+1}}{\ell_0} - 1 \right)$ – относительное удлинение стержня; ℓ_0 – длина стержня в ненапряженном состоянии, $\ell_{i,i+1} = \sqrt{(X_{i+1} - X_i)^2 + (Y_{i+1} - Y_i)^2}$ – длина стержня в данный момент времени.

ностным аналогом (5), где Δt – шаг по времени. Для первой точки – с номером «0» и последней точки нити с номером «N» уравнения не приведены. В них не будет одного из слагаемых, а если нить за-

креплена в одной из этих точек, то два соответствующих ей уравнения исчезают во-

обще.

$$\left. \begin{aligned} X_i^{t+1} &= 2X_i^t - X_i^{t-1} + (\Delta t)^2 \frac{ES}{m_i} \left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{1}{\sqrt{(X_i^t - X_{i-1}^t)^2 + (Y_i^t - Y_{i-1}^t)^2}} \right) (X_{i-1}^t - X_i^t) + \\ &+ (\Delta t)^2 \frac{ES}{m_i} \left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{1}{\sqrt{(X_{i+1}^t - X_i^t)^2 + (Y_{i+1}^t - Y_i^t)^2}} \right) (X_{i+1}^t - X_i^t), \\ Y_i^{t+1} &= 2Y_i^t - Y_i^{t-1} + (\Delta t)^2 \frac{ES}{m_i} \left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{1}{\sqrt{(X_i^t - X_{i-1}^t)^2 + (Y_i^t - Y_{i-1}^t)^2}} \right) (Y_{i-1}^t - Y_i^t) + \\ &+ (\Delta t)^2 \frac{ES}{m_i} \left(\frac{1}{\ell_0} - \frac{1}{\sqrt{(X_{i+1}^t - X_i^t)^2 + (Y_{i+1}^t - Y_i^t)^2}} \right) (Y_{i+1}^t - Y_i^t), \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$i=1...N-1$.

Известно, что решение одномерного волнового уравнения (6) представляет сумму гармонических стоячих волн, возбужденных заданными начальными условиями [5]:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (6)$$

где $U(x,t)$ – поперечные смещения упругой струны.

Аналогично, зная координаты точек в начальный и следующий момент времени (задача Коши), по формулам (5) можно вычислить значения координат в последующие моменты времени.

Для сходимости решения необходимо выполнение условий устойчивости, то есть необходимо ввести ограничения на величину шага по времени. Эти ограничения были получены из следующих соображений.

Известно, что математическая модель (1)...(3) при соответствующих условиях переходит в классическое волновое уравнение (6), описывающее колебание струны или продольные колебания стержня [6].

Из теории разностных схем известно, что для явной разностной схемы, аппроксимирующей (6), критерием устойчивости является условие Куранта: $\Delta t \leq \frac{\Delta x}{a}$ [6, с. 77...79]. Поэтому логично предположить, что для (5) шаг по времени не должен быть больше числа Куранта $\frac{\Delta x}{a}$.

Физический смысл условия Куранта – время взаимодействия между соседними точками разностной схемы не должно превышать времени распространения между ними продольной волны. Численные эксперименты подтвердили эту гипотезу, то есть схема (5) подчиняется условию Куранта. Шаг по времени вычислялся из равенства $\frac{\ell_0}{\Delta t} = a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ – скорость звука, то есть скорость распространения продольных волн в нити.

Изложенные заключения являются аналитической основой моделирования взаимодействия пряди-нити и била в виде полуплоскости.

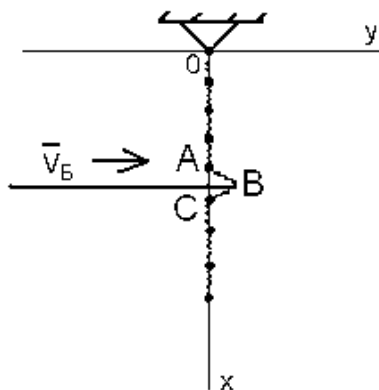


Рис. 1

Пусть по однородной, конечной длины нити бьет било-полуплоскость. Верхний конец нити закреплен (рис.1 – схема модели взаимодействия). Разделим нить на $N+1$ равных частей (по примеру, изложенному в [3]) и заменим ее системой $N+1$ материальных точек, соединенных растяжимыми стержнями. В этом случае уравнения движения точек описываются системой (4) за исключением двух точек, между которыми находится кромка била.

Пусть полуплоскость бьет по растяжимому стержню, представленному на рис. 1 пружиной, расположенной между i -й и $i+1$ -й точкой.

Моделирование взаимодействия била-полуплоскости и нити заключается в том, что в момент времени $t>0$ кромка полуплоскости “растянет” пружину между этими точками. Вследствие этого величина силы, действующая на эти точки со стороны “растянутой” пружины, будет пропорциональна ее длине и направлена вдоль пружины в сторону кромки била для каждой точки соответственно (при дальнейшем движении пружина может быть и сжата, и направление действия силы будет противоположным). Считаем, что пружины скользят вдоль кромки била без трения.

Рассмотрим рис. 1. Пусть точка A будет i -й точкой с координатами $(X_i; Y_i)$. Точка C – это $i+1$ -я точка с координатами $(X_{i+1}; Y_{i+1})$. Точка B – бесконечно тонкая кромка полуплоскости (била) с координатами $(X_B; Y_B)$. Скорость била \vec{V}_B .

В момент времени $t=0$ длина пружины между точками i и $i+1$ была равна AC . При $t>0$ кромка била “растянула” пружину и ее длина стала $AB+BC$.

По теореме Пифагора:

$$AB + BC = \sqrt{(X_B - X_i)^2 + (Y_B - Y_i)^2} + \sqrt{(X_B - X_{i+1})^2 + (Y_B - Y_{i+1})^2}.$$

Тогда $\Delta l = AB + BC - l_0$ – удлинение пружины.

По закону Гука величина силы упругости пружины: $\pm |\vec{F}_{II}| = \frac{ES}{l_0} \Delta l = \frac{ES}{l_0} (AB + BC - l_0)$,

(знак «+» – когда пружинка растянута). Растянутая пружина, стремясь “сжаться” действует на точку A в направлении AB .

Единичный вектор в направлении AB будет:

$$\vec{F}_{II} = \frac{ES}{l_0} (AB + BC - l_0) \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{ES}{l_0} (AB + BC - l_0) \frac{(X_B - X_i)\vec{i} + (Y_B - Y_i)\vec{j}}{\sqrt{(X_B - X_i)^2 + (Y_B - Y_i)^2}}.$$

Кроме этого, на i -ю точку, то есть на точку A , действует сила со стороны $(i-1)$ -й точки. Проекция этой силы можно вычислить из системы (4).

$$\frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{(X_B - X_i)\vec{i} + (Y_B - Y_i)\vec{j}}{\sqrt{(X_B - X_i)^2 + (Y_B - Y_i)^2}}.$$

Умножая величину силы со знаком плюс (пружина растянута) на этот вектор, получим вектор силы, действующий со стороны пружинки на точку A :

Обозначим эту силу \vec{F}_{i-1} . Тогда по второму закону Ньютона: $m\vec{a}_i = \vec{F}_{i-1} + \vec{F}_{II}$.

Запишем его выражение в проекциях на оси декартовых координат, заменив ус-

корение второй производной по времени от радиус-вектора:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 X_i}{dt^2} = ES \left(\frac{\ell_{i-1,i}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(X_{i-1} - X_i)}{\ell_{i-1,i}} + \frac{ES}{\ell_0} (AB + BC - \ell_0) \frac{(X_B - X_i)}{\sqrt{(X_B - X_i)^2 + (Y_B - Y_i)^2}} \\ m \frac{d^2 Y_i}{dt^2} = ES \left(\frac{\ell_{i-1,i}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(Y_{i-1} - Y_i)}{\ell_{i-1,i}} + \frac{ES}{\ell_0} (AB + BC - \ell_0) \frac{(Y_B - Y_i)}{\sqrt{(X_B - X_i)^2 + (Y_B - Y_i)^2}} \end{cases} \quad (7)$$

Это дифференциальные уравнения движения i -й точки, расположенной выше

кромки била. Для $(i+1)$ -й точки уравнения выводятся аналогично:

$$\begin{cases} m \frac{d^2 X_i}{dt^2} = \frac{ES}{\ell_0} (AB + BC - \ell_0) \frac{(X_B - X_{i+1})}{\sqrt{(X_B - X_{i+1})^2 + (Y_B - Y_{i+1})^2}} + ES \left(\frac{\ell_{i,i+1}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(X_{i+1} - X_i)}{\ell_{i,i+1}} \\ m \frac{d^2 Y_i}{dt^2} = \frac{ES}{\ell_0} (AB + BC - \ell_0) \frac{(Y_B - Y_{i+1})}{\sqrt{(X_B - X_{i+1})^2 + (Y_B - Y_{i+1})^2}} + ES \left(\frac{\ell_{i,i+1}}{\ell_0} - 1 \right) \frac{(Y_{i+1} - Y_i)}{\ell_{i,i+1}} \end{cases} \quad (8)$$

Предлагаемая модель взаимодействия нити с билем предполагает описание движения нити системой (4), в которой 4 уравнения движения i -й и $(i+1)$ -й точки заменяются на полученные (7) и (8), если кромка полуплоскости (била) оказывает влияние на движение этих точек. Значение координат на $(t+1)$ -м слое сначала вычисляем по формулам (5).

Затем проверяем, оказывает ли кромка била влияние на движение нити. Для этого определяем, для каких двух соседних точек нити отрезок, их соединяющий, пересекает полуплоскость (на рис. 1 отрезок AC).

Если таких точек нет, то нить "свободна", поэтому начинаем реализовывать новый цикл по времени. Если же такие точки присутствуют, то для этих двух точек значения параметров движения вычисляем по разностным аналогам вышеприведенных уравнений (7) и (8).

В качестве примера приведем результат моделирования взаимодействия вертикально висящей нити и горизонтально перемещающегося с постоянной скоростью 10 м/с била. Параметры нити: масса 0,01 г; длина 0,6 м; площадь поперечного

сечения 0,00001 м²; модуль упругости 10⁹ Н/м²; количество точек 303.

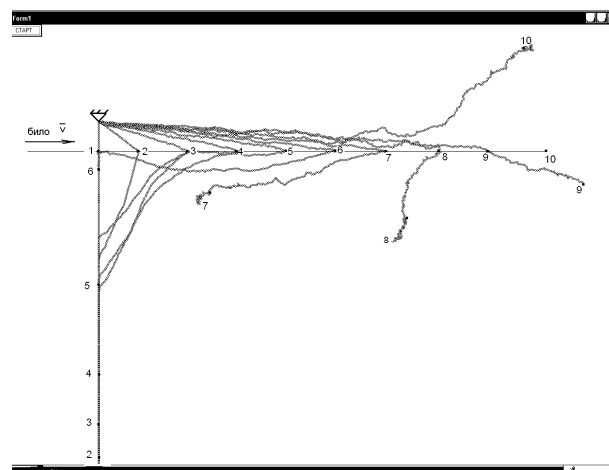


Рис. 2

Результаты моделирования представлены на рис.2. Время процесса взаимодействия составило 0,04725 с. Цифрами отмечены 10 положений била и нити через интервал времени, равный 0,00535 с.

Из результатов анализа следует, что после соприкосновения нити с кромкой била ее свободно висящий конец вначале перемещается вертикально вверх, а верхний участок нити вблизи зажима отклоня-

ется, следуя за биллом, сохраняя прямолинейную форму.

Участок нити, набегаящий на кромку била, также отклоняется вслед за биллом, приближаясь к полуплоскости-биллу снизу, но форма его уже не прямолинейна (позиции 1, 2, 3, 4 и 5).

Далее, после взаимодействия с полуплоскостью-биллом (позиция 6), свободный конец нити удаляется от полуплоскости, разворачиваясь относительно кромки била (позиции 7, 8 и 9), и в конечном итоге сходится с биллом (позиция 10).

Выявленные особенности поведения пряжи-нити в процессе взаимодействия с биллом существенно отличаются от общепризнанных представлений относительно характера перемещения свободного участка льноволокна при трепании. Это обстоятельство требует дальнейших исследований, учитывающих, например, изгибную жесткость волокна, силы трения, геометрические параметры била.

ВЫВОДЫ

1. Предложен вывод явной разностной схемы, описывающей движение идеально гибкой нити и условие ее устойчивости. Выведена система дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие полуплоскости и нити.

2. Выявленный характер перемещения свободного конца нити отличается от об-

щепризнанного представления о мгновенном прямолинейном расположении конца льняной пряжи на плоскости подбильной решетки (или плоскости била) в процессе трепания, например, двухбильными барабанами.

3. Установленные особенности взаимодействия обрабатываемого материала и рабочих органов при трепании требуют дополнительного уточнения кинематического и силового анализа, применительно к концевым участкам волокна при трепании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Разин С.Н., Пашин Е.Л.* Теоретические основы совершенствования механической модификации льна: Монография. – Кострома: КГТУ, 2005.
2. *Лапшин А.Б., Пашин Е.Л.* Развитие теории процесса трепания льна: Монография. – Кострома: КГТУ, 2004.
3. *Рахматуллин Х.А., Демьянов Ю.А.* Прочность при интенсивных кратковременных нагрузках. – М.: Физ.-мат. лит., 1961.
4. *Лапшин А.Б., Пашин Е.Л.* // Изв. вузов. Машиностроение. – 2002, №8. С.3...10.
5. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1984.
6. *Марчук Г.И.* Методы вычислительной математики. – М.: Наука, 1989.

Рекомендована кафедрой теоретической механики и сопротивления материалов КГТУ. Поступила 15.01.07.