УДК 677.021.164

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ПРИ УЧЕТЕ СЕПАРАЦИИ, ВОЗНИКАЮЩЕЙ НА УСТРОЙСТВЕ ДЛЯ ОЧИСТКИ ЛЬНОВОЛОКНА

С.Ю. КАПУСТИН, В.Д. ФРОЛОВ, Ф.Р. КАХРАМАНОВ, А.В.СУХОВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

При движении льноволокна на новом устройстве часть пыли и сорных примесей удаляется через отверстия, а другая часть остается двигаться между главным барабаном и новым устройством [1]. Вследствие этого рассмотрим ту часть движения льноволокна, которое осуществляется вдоль эллиптических отверстий нового устройства [2]. При этом возможны следующие виды взаимодействия, возникающие при разделении потоков: один идет через эллипсовидное отверстие, другой остается на устройстве для очистки.

Рассмотрим поток, который остается на устройстве для очистки волокна. При этом делаем следующие допущения: эллипсовидное отверстие будем рассматривать как эллиптический цилиндр, потому что поток, который выделяется через отверстие, будет иметь его форму.

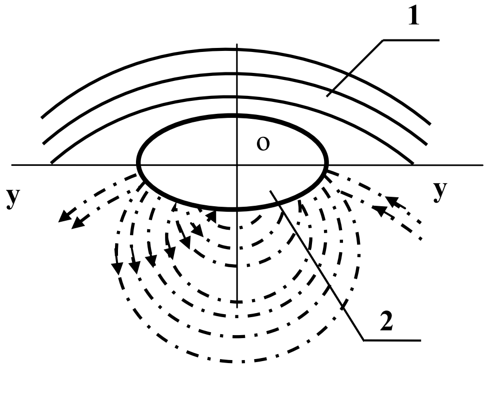

Рис. 1

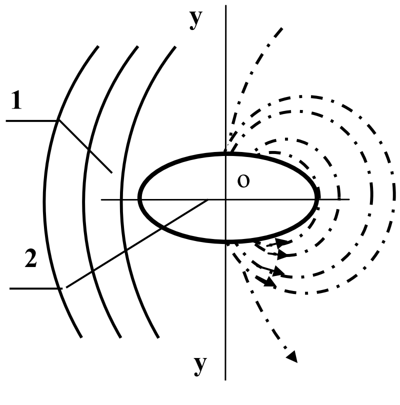

Рис. 2

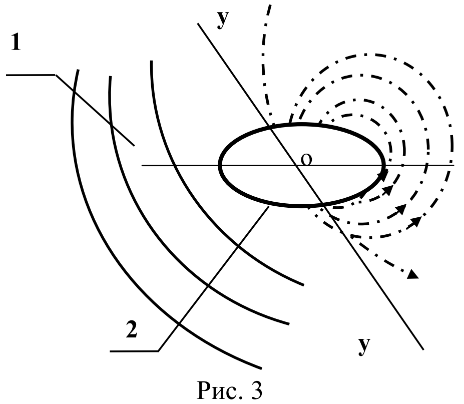

Рис. 3

При этом возможны следующие варианты обтекания эллипсовидного отверстия: а) – продольное (рис. 1); б) – поперечное (рис. 2); в) – косое обтекание (рис. 3).

Рассмотрим обтекание эллиптического цилиндра (рис.1), где 1 – волокно, 2 – эллипсовидное отверстие. Для этого находим комплексный потенциал $w(z) = \varphi + i\psi$, где $z = x + yi$, и строим картину течения при обтекании эллипсовидного отверстия (рис. 1) установившимся

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b) \tag{1}$$

поступательным потоком, скорость которого в бесконечности U направлена по большой оси цилиндра.

Попытаемся найти такое конформное преобразование плоскости z в плоскость новой комплексной переменной ζ $z=f(\zeta)$, при котором контур эллиптического цилиндра в плоскости z перешел бы в контур круга некоторого радиуса в плоскости ζ с центром в точке $r=0$, и чтобы точке $z=\infty$ соответствовала точка $\zeta=\infty$.

Найдем потенциал $w[F(z)]$ течения в плоскости z. Для указанной цели произведем прежде всего преобразование подобия:

$$z=cz', \tag{2}$$

где $c=\sqrt{a^2-b^2}$ – линейный эксцентриситет данного эллипса.

Тогда эллипсу (1) в плоскости z' будет соответствовать эллипс:

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}=1, \tag{3}$$

где $a'=\frac{a}{c}$ и $b'=\frac{b}{c}$, линейный эксцентриситет которого равен 1.

При этом, очевидно, точкам $z=0$ и $z=\infty$ будут соответствовать точки $z'=0$ и $z'=\infty$.

Из теории конформных преобразований известно, что подстановка

$$z'=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right) \tag{4}$$

преобразует эллипс на плоскости z':

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{4}\left(R+\frac{1}{R}\right)^2}+\frac{y'^2}{\frac{1}{4}\left(R-\frac{1}{R}\right)^2}=1 \tag{5}$$

с эксцентриситетом 1 в окружность на плоскости ζ радиуса R с центром в $\zeta=0$, причем, если $R>1$.

Подберем радиус R так, чтобы отождествить эллипсы (3) и (5):

$$\frac{1}{2}\left(R+\frac{1}{R}\right)=a'=\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}};\ \frac{1}{2}\left(R-\frac{1}{R}\right)=b'=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}} \quad (R>1).$$

Эти уравнения не независимы и можно было бы ограничиться одним из них. Складывая, находим

$$R=\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}>1. \tag{6}$$

Таким образом, искомое преобразование будет:

$$z=\frac{c}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right). \tag{7}$$

Взяв известное выражение комплексного потенциала течения в плоскости ζ при обтекании кругового цилиндра потоком, скорость которого в бесконечности u параллельна вещественной оси:

$$w=u\left(\zeta+\frac{R^2}{\zeta}\right)=u\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\frac{a+b}{a-b}\right), \tag{8}$$

мы должны еще скорость u при $\zeta=\infty$ выбрать так, чтобы получить в плоскости z при $z=\infty$ скорость U.

Преобразование, обратное преобразованию (7), будет неоднозначно:

$$\zeta=\frac{1}{c}\left(z\pm\sqrt{z^2+c^2}\right),$$

но требование $(R > 1)$ делает его однозначным.

Действительно, для точки $z = a$ мы имеем:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}(a \pm b),$$

и, так как эта точка ζ должна лежать на окружности радиуса $R = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$, необходимо взять верхний знак:

$$\zeta = \frac{1}{c}\left(z + \sqrt{z^2 - c^2}\right). \qquad (9)$$

При этом мы подразумеваем под $\sqrt{z^2 - c^2}$ то значение этого корня, которое при $z > c$ положительно.

Комплексный потенциал (8) вследствие (9) преобразуется к виду:

$$w = \frac{u}{c}\left[z + \sqrt{z^2 - c^2} + \frac{a+b}{a-b}(z - \sqrt{z^2 - c^2})\right] = \frac{2u}{c(a-b)}(az - b\sqrt{z^2 - c^2}).$$

Вычисляя комплексную скорость, имеем:

$$\overline{\upsilon} = \frac{dw}{dz} = \frac{2u}{c(a-b)}\left(a - \frac{b}{\sqrt{z^2 - c^2)}}\right),$$

откуда видно, что при $z = \infty$ $\overline{\upsilon}$, а следовательно, и $\upsilon = U$ вещественно и притом $U = \frac{2u}{c}$.

Таким образом, искомый потенциал при обтекании эллиптического цилиндра (1) поступательным потоком, параллельным $z = \infty$ большой оси цилиндра, будет:

$$w = \frac{U}{a-b}\left(az - b\sqrt{z^2 - c^2}\right). \qquad (10)$$

Для того, чтобы получить выражения для потенциала скорости φ и функции тока ψ, воспользуемся эллиптическими координатами:

$$x = c\,\mathrm{ch}\xi\cos\eta;\ y = c\,\mathrm{sh}\xi\cos\eta;\ c = \sqrt{a^2 - b^2}.$$

Тогда:

$$z = x + yi = \frac{c}{2}\left(e^{\xi + i\eta} + e^{-(\xi + i\eta)}\right) = c\,\mathrm{ch}t; \quad \sqrt{z^2 - c^2} = c\,\mathrm{sh}t,$$

где $t = \xi + i\eta$,

и

$$w = U\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}(a\,\mathrm{ch}t - b\,\mathrm{sh}t) =$$

$$= U\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\left[\frac{a-b}{2}e^{\xi}(\cos\eta + i\sin\eta) + \right.$$

$$\left. + \frac{a+b}{2}(\cos\eta - i\sin\eta)\right],$$

откуда

$$\varphi = U\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\left(\frac{a-b}{2}e^{\xi} + \frac{a+b}{2}e^{-\xi}\right)\cos\eta, \quad (11)$$

$$\psi = U\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\left(\frac{a-b}{2}e^{\xi} + \frac{a+b}{2}e^{-\xi}\right)\sin\eta. \quad (12)$$

Теперь рассмотрим случай поперечного обтекания (рис. 2). Если скорость потока в бесконечности V направлена в положительную сторону оси Oy, то, отобразив при помощи указанного выше преобразования:

$$z=\frac{c}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),\quad c=\sqrt{a^2-b^2}$$

внешность эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ плоскости z на внешность круга $\xi^2+\eta^2=R^2$, $R^2=\frac{a+b}{a-b}$ плоскости ζ.

Возвращаясь к переменной z по формуле $\zeta=\frac{1}{c}\left(z+\sqrt{z^2-c^2}\right)$, получим:

$$w=-\frac{ui}{c}\left[z+\sqrt{z^2-c^2}-R^2(z-\sqrt{z^2-c^2})\right]=\frac{2ui}{c(a-b)}(bz-a\sqrt{z^2-c^2}).$$

Отсюда найдем комплексную скорость течения в плоскости z:

$$\bar{\upsilon}=\frac{dw}{dz}=\frac{2ui}{c(a-b)}\left(b-\frac{az}{\sqrt{z^2-c^2}}\right).$$

Так как при $z=\infty$ должно быть $\bar{\upsilon}--Vi$, то получим $V=\frac{2u}{c}$, и, таким образом, искомое выражение для комплексного потенциала будет:

$$w=\frac{Vi}{a-b}(bz-a\sqrt{z^2-c^2})\,. \qquad (13)$$

Теперь рассмотрим случай косого обтекания (рис. 3). Если скорость в бесконечности υ_∞ составляет некоторый угол α с продольной осью эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad (a>b)\,,$$

то, разлагая вектор υ_∞ на составляющие

$$\upsilon_\infty=U+iV \qquad (14)$$

и рассматривая косое обтекание как результат сложения продольного и поперечного обтекания со скоростями U и V в бесконечно удаленных точках, мы можем комплексный потенциал такого результирующего движения представить как сумму соответствующих потенциалов (10) и (13):

$$w=-\frac{1}{a-b}\left[az-b\sqrt{z^2-c^2}U+i(bz-a\sqrt{z^2-c^2}V\right] \qquad (15)$$

вследствие линейности уравнения Лапласа, которому удовлетворяет $w=\varphi+i\psi$.

По причине отсутствия циркуляции силы, действующие на эллиптический цилиндр при косом обтекании, приводятся к следующей форме, которая может быть получена с применением формулы [(16), 3]:

$$L=\mathrm{Re}\left\{-2\pi i\rho\bar{\upsilon}_\infty a_2\right\}, \qquad (16)$$

где A_2 – коэффициент при $\frac{1}{z^2}$ в разложении $\frac{dw}{dz}$ в ряд по степеням $\frac{1}{z}$. Но в окрестности бесконечно далекой точки $\sqrt{z^2-c^2}=z\sqrt{1-\frac{c^2}{z^2}}=z-\frac{c^2}{2z^2}+\ldots$, следовательно:

$$w=(U+iV)z+\frac{a+b}{2}(bU+iaV)\frac{1}{z}+\ldots,$$

$$\frac{dw}{dz}=U-iV-\frac{a+b}{2}(bU+iaV)\frac{1}{z^2}+\ldots$$

Итак,

$$A_2=-\frac{(a+b)(bU+iaV)}{2}$$

и, следовательно:

$$L = \mathrm{Re}\{-2\pi i\rho(a+b)(U-iV)(bU+iaV)\} = -\pi\rho(a^2-b^2)UV. \qquad (17)$$

Заменяя U и V их выражениями $U = |\upsilon_\infty|\cos\alpha$, $V = |\upsilon_\infty|\sin\alpha$, получаем окончательно:

$$L = -\frac{\pi\rho}{2}(a^2-b^2)|\upsilon_\infty|^2 \sin 2\alpha. \quad (18)$$

ВЫВОДЫ

Разработанная методика дает возможность управлять технологическими потоками при учете явления сепарации на устройстве для очистки льноволокна, установленного на поточной линии.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капустин С.Ю.* Усовершенствование технологий в процессе очистки длинноволокнистых материалов на лентоформирующей машине в составе поточной линии ПЛ-I-КЛ: Дис….канд. техн. наук. – Иваново, 1992.

2. А.с. №1477794 (СССР). Устройство для очистки текстильных волокон / Капустин С.Ю. и др.: – Опубл. 1989. Бюл. №17.

3. *Кочин И.Е., Кобель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – Часть 1/ Под. ред. И.А. Кобеля. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 14.05.07.