УДК 677.08.021.16/022

ЭФФЕКТ СООСНЫХ ЦИЛИНДРОВ В ПРОЦЕССЕ РЕГЕНЕРАЦИИ ТЕКСТИЛЬНЫХ ОТХОДОВ

В.Д. ФРОЛОВ, Н.Г. ЖАРОВА, И.В. ФРОЛОВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

Свойства волокон и структура текстильных изделий, изготовленных из них, являются основными факторами, определяющими протекание процесса регенерации волокнистых отходов.

Наиболее эффективное и щадящее воздействие на технологию разволокнения текстильных структур оказывают круговые волны.

Если (S_λ) семейство соосных цилиндров в пространстве (или концентрических кругов в плоскости), то

$$r_1 = \sqrt{x^2 + y^2} = \lambda$$

и решение вида

$$u = \Phi(r_1)F[\omega(r_1) - t]$$

называются цилиндрической волной в пространстве или круговой волной в плоскости.

В одномерном случае волной будет называться решение вида

$$u = \Phi(x)F[\omega(x) - t]. \qquad (1)$$

Обобщенное интуитивное представление о волновом технологическом процессе называем (S_λ), когда волной является решение уравнения

$$\Box u = 0, \qquad (2)$$

где

$$\Box u = \frac{\partial^2 u}{\partial t} + \beta \frac{\partial u}{\partial t^2} - \left[a_{11} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1 \frac{\partial u}{\partial x} + b_2 \frac{\partial u}{\partial y} + cu \right], \qquad (3)$$

где коэффициенты уравнения (3) – непрерывные функции от x и y, а

$$a_{11} > 0, \;\; a_{22} > 0, \;\; a_{11}\, a_{22} > a_{12}{}^2.$$

Решение уравнения (1) имеет вид:

$$u(x, y, z, t) = \Phi(\nu)F[\omega(\nu) - t], \qquad (4)$$

где Φ, F и ω – функции одного переменного, причем Φ не равна тождественно нулю, F не постоянна, ω либо тождественно равна нулю, либо монотонна.

При этом, если $\omega \equiv 0$, то волна стоячая, если $\omega \neq 0$ – проходящая, а если Φ постоянна, волна не искажена.

Чтобы качественно описывать технологический процесс, определяемый решением (4) при $\omega \neq 0$, рассмотрим поверхность семейства (S_λ), уравнение которой

$$\nu(x, y, z) = \lambda_\ell.$$

Во всех точках этой поверхности

$$\dot{u} = \Phi(\lambda_1)F[\omega(\lambda_1) - t],$$

то есть процесс протекает на всей поверхности одинаково. Функция F, описывающая изменение u во времени на поверхности (S_λ), называется законом колебания. Величина $\omega(\nu)$-t, являющаяся аргументом функции F, называется фазой.

Рассмотрим две поверхности (S_λ): $\nu = \lambda_1$ и $\nu = \lambda_2$ и два момента времени t_1 и t_2.Тогда разница:

$$t_1 - t_2 = \omega(\lambda_2) - \omega(\lambda_1).$$

Очевидно, что F принимает на поверхности (S_λ) при $t = t_1$ то же значение, что (S_λ) при $t = t_2$.

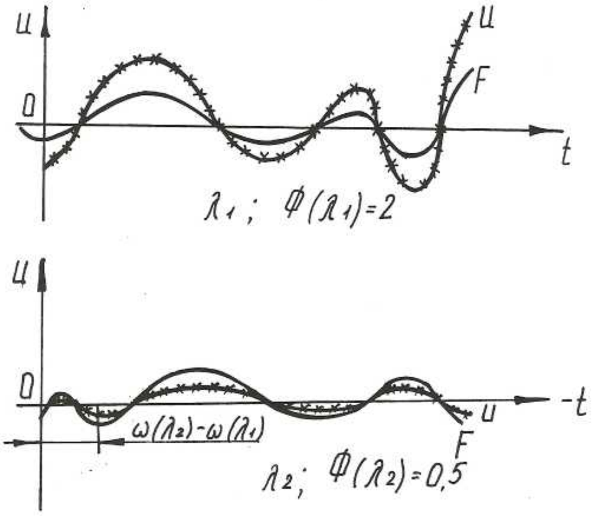

Рис. 1

Таким образом, графики F как функции времени t в точках этих двух поверхностей отличаются друг от друга сдвигом по оси t (рис.1) на величину

$$\omega(\lambda_2) - \omega(\lambda_1),$$

так называемый сдвиг фаз. Графики функции u в точках этих поверхностей отличаются еще растяжением или сжатием по оси ординат в отношении $\Phi(\lambda_2)$ к $\Phi(\lambda_1)$.

Также можно считать, что за время (t_2-t_1) фаза $\omega(\lambda)$-t, а вместе с ней значение функции F, перенесена с поверхности (S_{λ_1}) на поверхность (S_{λ_2}).

Можно считать, что поверхность равной фазы движется в пространстве, пробегая семейство (S_λ). Эта поверхность деформируемых отходов образует фазовую поверхность. Закон ее движения определяется соотношением

$$\omega(\nu) - t = \text{const}. \qquad (5)$$

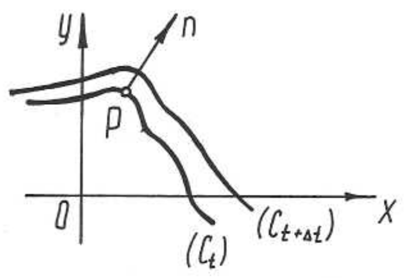

Рис. 2

Скорость перемещения фазовой поверхности связана со скоростью движения фронта волны в двумерном случае. При этом необходимо вначале определить скорость движения линии по плоскости в данной точке P линии (рис. 2). Проведем нормаль к линии в этой точке. При своем дальнейшем движении линия будет пересекать эту нормаль в некоторой движущейся по нормали точке P':

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{|PP'|}{\Delta t}. \qquad (6)$$

Значение (6) и называется скоростью движения линии в данной точке P.

Обозначим через ds расстояние, отсчитываемое по нормали в точке P от линии (C_t) до линии ($C_{t+\Delta t}$). Имеем:

$$|\nu| = \frac{ds}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{ds}} = \frac{1}{\omega'_r} = \frac{1}{|\text{grad}\,\omega|}, \qquad (7)$$

где градиент направлен по нормали к линии уровня, каковой является (C_t).

Для изотропной деформируемой среды имеем

$$|\,\mathrm{grad}\omega\,| = \sqrt{\omega'^2_x + \omega'^2_y} = \frac{1}{a}. \qquad (8)$$

Поэтому скорость движения фронта волны в этом случае:

$$|\,\nu\,| = a. \qquad (9)$$

Скорость перемещения фазовой поверхности, которая вычисляется по вышеприведенной схеме, равна

$$\frac{1}{|\,\mathrm{grad}(\nu)\,|} = \frac{1}{|\,\omega'\,|\,|\,\mathrm{grad}\,|}. \qquad (10)$$

Графики функции u в точках различных поверхностей (S_λ) отличаются растяжением или сжатием по оси ординат с изменением амплитуды без сдвига фаз. Если при некотором λ_o:

$$\Phi(\lambda_0) = 0,$$

то u всегда равна нулю на поверхности (S_{λ_0}), которая называется узлом.

Если при некотором $\tilde{\lambda}$ функция $\Phi(\tilde{\lambda})$ имеет максимум или минимум, то на поверхности ($S_{\tilde{\lambda}}$) u всегда имеет максимум или минимум, который характерен пучностью. В одномерном случае будут иметь место фазовые точки, узлы и пучности в точках.

Для определения (S_λ)-волны, допускаемой уравнением (2), необходимо подставить в него (4). В результате получаем соотношение:

$$A\Phi F'' + (B\Phi' + C\Phi)F' + (D\Phi'' + E\Phi' + G\Phi)F = 0, \quad (11)$$

где A, B, C, D, E, G – выражения, зависящие от ν, ω и коэффициентов уравнения, которые являются функциями от координат x, y, z. Для рассмотрения (S_λ)-волны необходимо, чтобы эти выражения были представлены как функции одного переменного ν. Это условие эквивалентно по следующей причине: коэффициенты уравнения, которое получено из (3) заменой координат x, y, z на криволинейные (одна из которых – ν) и путем отбрасывания членов с производными по другим координатам, должны зависеть только от ν. В случае уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u = 0 \qquad (12)$$

можно взять в качестве (S_λ) семейство концентрических сфер внутреннего узла деформирования и внешнего узла деформирования. Для примера находим выражение A:

$$A = 1 - \{a_{11}\omega'^2_x + a_{22}\omega'^2_y + a_{33}\omega'^2_z + 2a_{12}\omega'_x\,\omega'_y + 2a_{23}\omega'_y\,\omega'_z + 2a_{31}\omega'_z\,\omega'_x\}.$$

Так как функция F зависит от t, а коэффициенты при F, F' и F'' в (11) от t не зависят, то имеется два случая:

– все три коэффициента равны нулю:

$$\left.\begin{aligned} A &= 0, \\ B\Phi' + C\Phi &= 0, \\ D\Phi + E\Phi' + G\Phi &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Первое из этих равенств совпадает с характеристическим условием для трехмерного случая, когда совокупность членов, содержащих производные по t, условимся обозначать через M[u]:

$$M[u] \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial u}{\partial t}, \qquad (14)$$

а совокупность членов, содержащих искомую функцию u и ее производные по пространственным координатам, через L[u]:

$$L[u] = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial u}{\partial x} + b_2\frac{\partial u}{\partial y} + cu. \qquad (15)$$

Откуда имеем:

$$L[u]=a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\sigma}(a_{11}\omega'_x+a_{12}\omega'_y)-2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\sigma}(a_{12}\omega'_x+a_{22}\omega'_y)+$$

$$+\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}(a_{11}\omega'^2_x+2a_{12}\omega'_y+a_{22}\omega'^2_y)-\frac{\partial u}{\partial\sigma}\left\{L^{(2)}[\omega]+L^{(1)}[\omega]\right\}++b_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+cu. \qquad (16)$$

Тогда уравнение (2) примет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}\left\{1-\left[a_{11}\omega'^2_x+2a_{12}\omega'_x\,\omega'_y+a_{22}\omega'^2_y\right]\right\}+2\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\sigma}(a_{11}\omega'_x+a_{12}\omega'_y)+2\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\sigma}(a_{12}\omega'_x+a_{22}\omega'_y)+$$

$$+\frac{\partial u}{\partial\sigma}\left\{L^{(2)}[\omega]+L^{(1)}[\omega]+\beta\right\}-\left\{a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}+2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial\xi}+b_2\frac{\partial u}{\partial\eta}+bu\right\}=0. \qquad (17)$$

Из изложенного выше u тождественно равно нулю по одну сторону от (S) и непрерывно на (S) вместе со всеми своими производными до второго порядка включительно, кроме $\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}$. Таким образом, на (S):

$$u=\frac{\partial u}{\partial\xi}=\frac{\partial u}{\partial\eta}=\frac{\partial u}{\partial\sigma}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\sigma}=\frac{\partial^2 u}{\partial\eta\partial\sigma}=0.$$

Учитывая, что предел $\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}$ при приближении к любой точке (S), с одной стороны, равен нулю, с другой стороны, при приближении к этой же точке этот предел $\mu\neq 0$, а равен

$$\left[\mu-\text{скачок }\frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2}\text{ на S}\right].$$

Из соотношения (17) найдем, что в точках (S) должно выполняться равенство:

$$\mu\left[a_{11}\omega'^2_x+2a_{12}\omega'_x\,\omega'_y+a_{22}\omega'^2_y-1\right]=0$$

или

$$a_{11}\omega'^2_x+2a_{12}\omega'_x\,\omega'_y+a_{22}\omega'^2_y=1, \qquad (18)$$

которое является искомым условием на функцию ω. Следовательно:

$$t=\omega(\nu)+c$$

будет его характеристикой, поэтому вдоль фронта волны ($C_т$) эта функция (при постоянном t=r) либо саморазрывна, либо имеет разрыв производных какого-либо порядка. При изменении времени t фронт волны перемещается, поэтому имеет однопараметрическое семейство кривых (C_t), зависящих от t как от параметра. Уравнение этого семейства записывается в виде, разрешенном относительно t:

$$t=\omega(x,y). \qquad (19)$$

Поверхность (S), задаваемая этим уравнением, где функция ω(x; y) удовлетворяет уравнению (18), называется характеристической поверхностью или характеристикой уравнения (2).

Второе и третье равенства (13) представляют собой два уравнения для функции Φ, при этом функция F берется произвольно в зависимости от условий технологического процесса.

Уравнение (11) в этом случае является дифференциальным уравнением для функции F с постоянными коэффициентами:

$$F = e^{\alpha}\left[\omega(\nu) - t\right] = e^{\alpha\omega(\nu)}e^{-\alpha t},$$

где α – произвольное число.

Для случая чисто мнимого α:

$$\alpha = i\,k.$$

При $\Phi(\nu)e^{ik\omega(\nu)} = \psi_k(\nu)$ получим

$$u = \psi_k(\nu)e^{-ikt}\ . \quad (20)$$

Подставляя это выражение в (2), получим уравнение (содержащее параметр k), из которого определим функцию $\psi_k(\nu)$, являющуюся комплексно значимой. Модуль этой функции даст нам $\Phi(\nu)$, а ее аргумент будет равен $k\omega$, где функция $\omega(\nu)$ зависит от k.

В этом случае имеем (S_λ)-волны с гармонической формой колебания. Их фазовые скорости зависят от частоты колебаний и будут называться волнами с дисперсией.

При поиске волны вида

$$u = \psi(x)e^{-ikt}, \quad (21)$$

если α = 0, β ≠ 0, рассмотрим следующий интеграл:

$$u = \int_{r=0}^{t} \theta(P; t-r; r)dr. \quad (22)$$

При помощи этой формулы можно найти решение неоднородного трехмерного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t} - a^2\Delta u = f(x,y,z,t). \quad (23)$$

При начальных условиях

$$u\Big|_{t=0} = \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0,$$

$$u(x_0,y_0,z_0;t) = \int_0^t (t-r)M_{a(t-r)}\left[f(x,y,z;r)\right]dr = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^t \frac{dr}{t-r}\iint_{(s_{a(t-r)})} f(x,y,z;r)dS_{a(t-r)}\,.$$

Сделаем в этом интеграле замену переменного, положив a(t-r)= r. Тогда получим:

$$u(x_0,y_0,z_0;t) = \frac{1}{4\pi a^2}\int_0^{at}\frac{dr}{r}\iint_{(S_r)} f\left(x,y,z;t-\frac{r}{a}\right)dS_r = \frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{(\nu_{at})}\frac{f\left(x,y,z;t-\frac{r}{a}\right)}{r}d\nu, \quad (24)$$

где at – радиус с центром в (x_0,y_0,z_0); r – расстояние от переменной точки интегрирования (x, y, z) до центра симметрии.

Это выражение совпадает с ньютоновским потенциалом масс, распределенных в цилиндре с плотностью $\frac{f}{4\pi a^2}$, зависящей от времени t.

Подстановка (21) в (24) приводит к уравнению:

$$a^2\psi'' + (k^2 + c)\psi = 0,$$

решениями которого будут функции

$$\psi_1(x) = e^{i\frac{k}{a}\sqrt{1+\frac{c}{k^2}}x}, \quad \psi_2(x) = e^{-i\frac{k}{a}\sqrt{1+\frac{c}{k^2}}x}.$$

Если $1 + \frac{c}{k^2} > 0$,

$$u_1 = e^{ik\left(\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{c}{k^2}}-t\right)}, \quad u_2 = e^{-ik\left(\frac{x}{a}\sqrt{1+\frac{c}{k^2}}+t\right)}. \quad (25)$$

Из выражений (25) видна информация о двух проходящих волны, распространяющихся со скоростями:

$$\frac{a}{\sqrt{1+\dfrac{c}{k^2}}}, \quad -\frac{a}{\sqrt{1+\dfrac{c}{k^2}}}.$$

Таким образом, фазовая скорость зависит от частоты, поэтому эти волны являются волнами с дисперсией. Дисперсия вызвана наличием числа си, и при с = 0 она исчезает, поэтому член си называется дисперсионным.

Волновое уравнение с дисперсионным членом дает дисперсию плоских волн. В этом случае возможны только гармонические плоские волны и фазовая скорость зависит от частоты.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шкадов В.Я.* Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. – М.: МГУ. Институт механики, 1973. №25.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 01.04.08.