

**ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ МОНОНИТИ  
С ПЕТЛЕОБРАЗУЮЩИМИ ОРГАНАМИ  
ТРИКОТАЖНЫХ МАШИН ПРИ ЛИНЕЙНОМ КОНТАКТЕ**

*О. Ф. БЕЛЯЕВ, В. А. ЗАВАРУЕВ, Л. А. КУДРЯВИН*

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Пусть металлическая монопить (микропроволока) AD диаметром  $d$  движется по игле с радиусом  $R_1$  (рис. 1). Будем далее полагать аналогично работам [1], [2], что точки A и D находятся достаточно далеко от иглы, микропроволоку на участках вблизи них будем считать прямолинейной, а силы  $T_1$  и  $T_2$ , действующие на концы микропроволоки, направленными вдоль ее оси. Участок CD будем далее называть ведущей ветвью микропроволоки, а участок AB – ведомой ветвью.

Ранее нами было экспериментально показано, что при небольших углах  $\alpha$  между ведущей и ведомой ветвями микропроволоки зависимость натяжения  $T_2$  ведущей ветви от натяжения  $T_1$  ведомой можно

представить в виде двух практически прямолинейных участков [3].

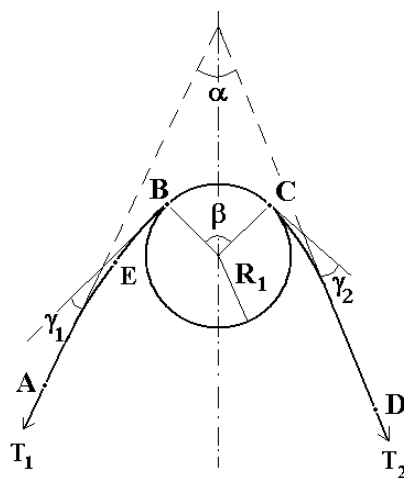


Рис. 1

Мы предположили, что наличие двух участков связано с переходом при увеличении сил  $T_1$  и  $T_2$  от точечного контакта микропроволоки с иглой к неточечному (линейному) контакту. Однако сопоставление экспериментальных данных с теоретическими предсказаниями в предположении, что микропроволока является абсолютно упругой, дало практически линейную зависимость  $T_2$  от  $T_1$  без наличия двух участков (без наличия “излома” на зависимости  $T_2$  от  $T_1$ ). В связи с этим мы в двух работах провели дальнейшее теоретическое рассмотрение, принимая, что микропроволока является не чисто упругой, а упруго-пластической, как это было экспериментально показано нами в [4]. Для упруго-пластических текстильных нитей аналогичная задача нахождения связи между  $T_2$  и  $T_1$  решалась в [5], [6]. Однако в этих работах не рассматривался “излом” на зависимостях  $T_2$  от  $T_1$ .

Рассмотрим неточечный (линейный) контакт в настоящей работе. Именно он изображен на рис.1.

Микропроволока, перемещаясь от точки А к точке В, увеличивает свою кривизну (уменьшает радиус изгиба), а при огибании иглы на участке ВС ее радиус кривизны  $\rho$  постоянен и равен  $R = (R_1+d/2)$ . Затем на участке CD происходит распрямление микропроволоки, ее радиус кривизны увеличивается.

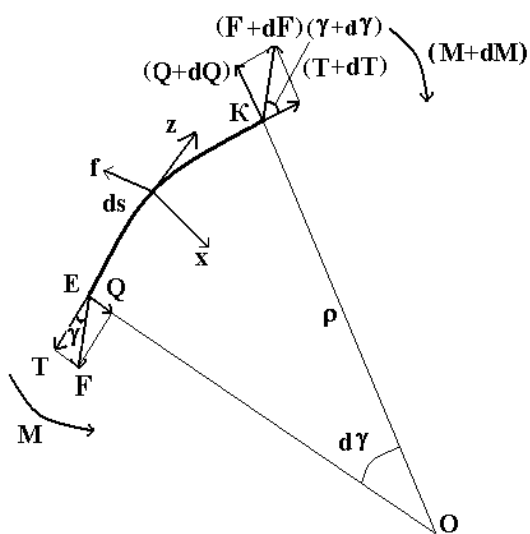


Рис. 2

Будем перемещаться по микропроволоке от точки А к точке D. Рассмотрим элементарный участок  $ds$  микропроволоки (рис.2). Он может находиться в любом месте микропроволоки. Выберем систему осей  $x, y, z$ . Ось  $z$  направим по касательной к микропроволоке в направлении перемещения (в сторону от точки Е к точке К), ось  $x$  – перпендикулярно оси  $z$  в сторону вогнутости микропроволоки, направление оси  $y$  свяжем с направлением осей  $x$  и  $z$  правилом правого винта. В данном случае ось  $y$  будет направлена перпендикулярно плоскости, в которой находится нить (перпендикулярно плоскости листа) и направлена вглубь листа (в сторону от нас).

Пусть помимо сосредоточенной силы  $F$  на участок  $ds$  действует также распределенная сила  $f$  (сила, действующая на единицу длины нити) и изгибающий момент  $M$ .

Силу  $F$  можно разложить на две составляющие – поперечную силу  $Q$ , направленную перпендикулярно оси нити (ее иногда называют перерезывающей силой), и силу  $T$ , направленную вдоль оси нити (ее можно назвать продольной силой или силой натяжения). По абсолютной величине для точки Е они определяются формулами:

$$Q = F \sin \gamma, \quad T = F \cos \gamma.$$

Векторы  $dT, dQ, dM$  характеризуют изменение векторов  $T, Q, M$  при переходе от точки Е к точке К. Связь всех перечисленных сил и моментов сил в проекциях на оси  $x, y, z$  дана, например, в [7]:

$$\frac{dQ_x}{ds} + \frac{T_z}{\rho} + f_x = 0, \quad (1)$$

$$\frac{dT_z}{ds} - \frac{Q_x}{\rho} + f_z = 0, \quad (2)$$

$$\frac{dM_y}{ds} + Q_x = 0. \quad (3)$$

Здесь  $Q_x, dQ_x$  – проекции векторов  $Q$  и  $dQ$  на ось  $x$ ;  $T_z, dT_z$  – проекции векторов  $T$ ,  $dT$  на ось  $z$ ;  $f_x, f_z$  – проекции распределенной силы  $f$  на оси  $x, z$ ;  $dM_y$  – проекция момента сил  $M$  на ось  $y$ , (векторы  $Q, dQ, T, dT, M, dM$ , заменяют действие на участок

ds отброшенных участков микропроволоки и иглы).

Если элементарный участок ds находится на участке АВ микропроволоки, распределенная сила f отсутствует, сила F равна T<sub>1</sub>, величина dF = 0, сила Q в точке К направлена против оси x, сила T – по оси z, момент М – по оси у. Поэтому проекция Q на ось x отрицательна, то есть Q<sub>x</sub> = -Q, проекция силы T на ось z положительна (T<sub>z</sub> = T), проекция момента М на ось у также положительна (M<sub>y</sub> = M). Поскольку распределенная сила f на участке АВ отсутствует, то f<sub>x</sub>=f<sub>z</sub>=0.

Учитывая вышесказанное, а также то, что ds = ρdγ, вышеприведенные уравнения для участка АВ можно записать следующим образом:

$$-\frac{dQ}{d\gamma} + T = 0, \quad (4)$$

$$\frac{dT}{d\gamma} + Q = 0, \quad (5)$$

$$\frac{dM}{\rho d\gamma} - Q = 0. \quad (6)$$

Учитывая также, что Q = F sin γ = T<sub>1</sub> sin γ и подставляя это выражение в последнее уравнение, вместо него будем иметь:

$$\frac{dM}{\rho} = T_1 \sin \gamma d\gamma.$$

Проинтегрируем это выражение от точки А до точки В (рис.1):

$$\int_{\text{т.А}}^{\text{т.В}} \left( \frac{1}{\rho} \right) dM = \int_0^{\gamma_1} T_1 \sin \gamma d\gamma.$$

Согласно [3] зависимость между моментом силы М, изгибающим микропроволоку, и радиусом ее кривизны ρ дается графиком, изображенным на рис.3. Левый интеграл в последней формуле дает площадь фигуры ОВСК; обозначим ее S<sub>1</sub>. Правый интеграл равен T<sub>1</sub> (1 - cos γ<sub>1</sub>). Отсюда имеем: S<sub>1</sub> = T<sub>1</sub>(1 - cos γ<sub>1</sub>) или T<sub>1</sub> = S<sub>1</sub>/(1 - cos γ<sub>1</sub>).

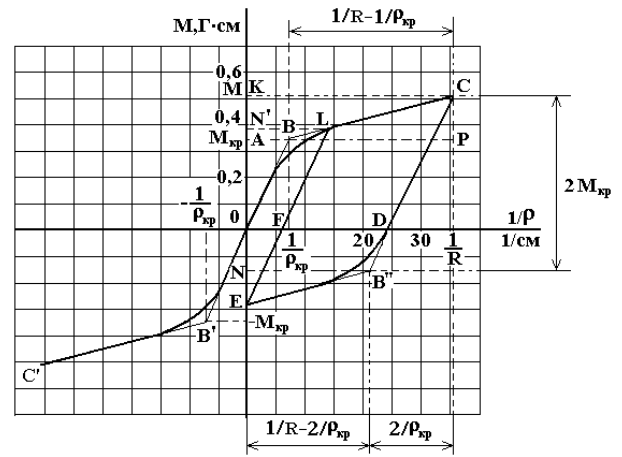


Рис. 3

Аналогично можно показать, что для участка микропроволоки CD будем иметь:

$$T_2 = S_2 / (1 - \cos \gamma_2),$$

где S<sub>2</sub> – площадь КСВ"Е.

Отсюда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{S_2}{S_1} \frac{1 - \cos \gamma_1}{1 - \cos \gamma_2}. \quad (7)$$

Площадь S<sub>1</sub> складывается из площади треугольника АВО и площади трапеции АВСК. Площадь треугольника АВО равна (АВ АО)/2 = M<sub>кр</sub>(1/ρ<sub>кр</sub>)/2. Ее в дальнейшем будем обозначать S<sub>кр</sub>. Площадь трапеции АВСК равна (АВ+КС)КА/2 = (1/ρ<sub>кр</sub>+1/R)·(M-M<sub>кр</sub>)/2. Общая площадь S<sub>1</sub> = S<sub>кр</sub> + (1/ρ<sub>кр</sub> + 1/R)·(M-M<sub>кр</sub>)/2. Здесь R, M – радиус кривизны микропроволоки и изгибающий ее момент в точке С на приведенном графике.

Площадь S<sub>2</sub> складывается из площади трапеции КСВ"Н и площади треугольника NB"Е. Площадь трапеции КСВ"Н равна (КС+NB")KN/2 = [(1/R + (1/R - 2/ρ<sub>кр</sub>)]·2M<sub>кр</sub>/2 = = 2(1/R - 1/ρ<sub>кр</sub>) M<sub>кр</sub>. Площадь треугольника NB"Е равна NE NB"/2. Прямые ВС и EB" параллельны друг другу. Поэтому треугольники ВСР и NB"Е подобны друг другу. Поэтому NE/NB" = CP/BP. Тогда NE = NB" CP/BP и площадь треугольника NB"Е будет равна 0,5(NB")<sup>2</sup>CP/BP = = 0,5(1/R - 2/ρ<sub>кр</sub>)<sup>2</sup>(M-M<sub>кр</sub>)/(1/R - 1/ρ<sub>кр</sub>). Общая

площадь  $S_2 = 2(1/R - 1/\rho_{кр})] M_{кр} + 0,5(1/R - 2/\rho_{кр})^2 (M - M_{кр}) / (1/R - 1/\rho_{кр})$ .

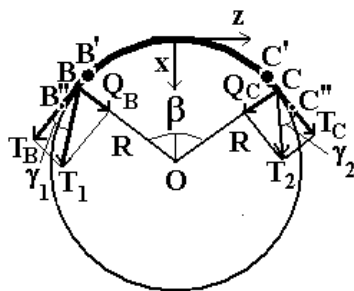


Рис. 4

Рассмотрим теперь участок BC из рис.1. Он изображен в увеличенном масштабе на рис. 4. На этом участке микропровода соприкасается с иглой радиуса  $R_1$ .

Помимо крайних точек B и C этого участка будем рассматривать также точки микропровода  $B', C'$ , лежащие внутри этого участка в непосредственной близости к точкам B и C, и точки микропровода  $B'', C''$ , лежащие вне этого участка, но также в непосредственной близости к точкам B и C. В точке B имеет место сосредоточенная поперечная сила  $Q_B = T_1 \sin \gamma_1$ , направленная к центру иглы по радиусу. Согласно третьему закону Ньютона она должна вызвать реакцию опоры  $N_B$ , равную по величине  $Q_B$ , но противоположно ей направленную. (Равенство  $N_B$  и  $Q_B$  является также следствием уравнения (3). Действительно, на участке BC радиус кривизны микропровода постоянен. Поэтому постоянен и изгибающий микропроводу момент  $M_v$ , а его производная равна нулю. Следовательно, равна нулю и поперечная сила во всех точках участка BC, в том числе и в точке B. В точке B поперечная сила складывается из сил  $N_B$  и  $Q_B$ . Чтобы результирующая поперечная сила равнялась нулю, силы  $N_B$  и  $Q_B$  должны быть равны по величине и противоположны по направлению.)

Если в данном случае справедлив закон Амонтона, то в точке B возникает сосредоточенная сила трения  $F_{трB} = \mu N_B = \mu T_1 \sin \gamma_1$ , направленная против движения нити, то есть вдоль силы  $T_B$ . Коэффициент  $\mu$  – ко-

эффициент трения нити об иглу. Аналогично в точке C возникает сосредоточенная сила трения  $F_{трC} = \mu N_C = \mu T_2 \sin \gamma_2$ , также направленная против движения нити, в данном случае против силы  $T_C$ .

Рассмотрим участок  $B', C'$ . На этом участке радиус кривизны микропровода во всех точках один и тот же и равен  $R$ , поэтому момент силы во всех точках этого участка также должен быть одним и тем же, и, следовательно,  $dM_v/ds = 0$ . Тогда согласно уравнению (3) сосредоточенная поперечная сила  $Q$ , как уже указывалось выше, на этом участке отсутствует.

В этом случае уравнения (1) и (2) для данного участка будут иметь вид:

$$\frac{T_z}{\rho} + f_x = 0, \quad (8)$$

$$\frac{dT_z}{ds} + f_z = 0. \quad (9)$$

Здесь  $T_z$  – проекция силы натяжения нити на ось z (она равна просто T);  $f_x$  – проекция распределенной внешней силы  $f$  на ось x;  $f_z$  – проекция распределенной внешней силы  $f$  на ось z (оси x, y, z направлены аналогично рис. 2).

Учитывая, что радиус кривизны  $\rho$  микропровода на участке  $B'C'$  один и тот же и равен  $R$ , из уравнения (8) имеем:  $f_x = -T_z/R = -T/R$ . Величина  $f_x$  – распределенная сила (сила на единицу длины нити), с которой игла действует на нить вдоль оси x. Поскольку она отрицательна, то она направлена против оси x, то есть от центра иглы по радиусу наружу и представляет собой распределенную реакцию опоры (иглы). Величина же  $f_z$  представляет собой в этом случае распределенную силу трения. Согласно закону Амонтона  $f_z = \mu f_x = -\mu T/R$ . Знак "минус" показывает, что она направлена против оси z. Подставляя выражение для  $f_z$  в уравнение (9) и учитывая, что  $T_z = T$ , а  $ds = R d\gamma$ , получим:

$$\frac{dT}{d\gamma} = \mu T \quad \text{или} \quad \frac{dT}{T} = \mu d\gamma.$$

Интегрируя это уравнение от точки В' до точки С' и произведя некоторые простые преобразования, имеем:

$$T_{C'} = T_{B'} e^{\mu\beta}. \quad (10)$$

В данном случае угол  $\beta'$  – угол между радиусами, соединяющими точки В', С' с центром иглы. Поскольку В', С' располагаются в непосредственной близости к точкам В и С, угол  $\beta'$  можно принять равным углу  $\beta$  – углу между радиусами, соединяющими точки В и С с центром иглы (рис. 4).

Сила  $T_{B'}$  больше силы  $T_{B''}$  на величину сосредоточенной силы трения  $F_{трВ}$  в точке В. Аналогично сила  $T_{C'}$  больше силы  $T_{C''}$  на величину сосредоточенной силы трения  $F_{трС}$ :

$$T_{B'} - T_{B''} = F_{трВ} = \mu T_1 \sin \gamma_1,$$

$$T_{C'} - T_{C''} = F_{трС} = \mu T_2 \sin \gamma_2.$$

Учитывая, что точки В'' и С'' лежат в непосредственной близости к точкам В и С, углы  $\gamma$  для них практически те же самые, что и для точек В и С. Поэтому силы  $T_{B''}$ ,  $T_{C''}$  также практически те же самые, что и силы  $T_B$  и  $T_C$ , и можно записать:

$$T_{B'} = T_{B''} + \mu T_1 \sin \gamma_1 = T_1 (\cos \gamma_1 + \mu T_1 \sin \gamma_1),$$

$$T_{C'} = T_{C''} - \mu T_2 \sin \gamma_2 = T_2 (\cos \gamma_2 - \mu T_2 \sin \gamma_2).$$

Подставляя эти выражения в уравнение (10), будем иметь:

$$T_2 (\cos \gamma_2 - \mu T_2 \sin \gamma_2) = T_1 (\cos \gamma_1 + \mu T_1 \sin \gamma_1) e^{\mu\beta}.$$

Как нетрудно показать из рис. 1,  $\beta = \pi - \alpha - \gamma_1 - \gamma_2$  (все углы при этом измеряются в радианах, угол  $\beta$  – действительный угол охвата. Угол  $\pi - \alpha = \beta_0$  – угол охвата при идеально гибкой нити). Тогда

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{\cos \gamma_1 + \mu \sin \gamma_1}{\cos \gamma_2 - \mu \sin \gamma_2} e^{\mu(\pi - \alpha - \gamma_1 - \gamma_2)}. \quad (11)$$

В выражении (11) и в уравнении (7) левые части равны, поэтому можно приравнять их правые части и после небольших преобразований получить:

$$\frac{\cos \gamma_1 + \mu \sin \gamma_1}{1 - \cos \gamma_1} e^{\mu(\pi - \alpha - \gamma_1)} =$$

$$= \frac{S_2}{S_1} \frac{\cos \gamma_2 - \mu \sin \gamma_2}{1 - \cos \gamma_2} e^{\mu\gamma_2}. \quad (12)$$

Рассчитав из графика величину  $S_1$ , задав натяжение  $T_1$  ведомой ветви микропровода и используя ранее полученное выражение  $T_1 = S_1 / (1 - \cos \gamma_1)$ , можно рассчитать  $\cos \gamma_1$ , а по нему определить  $\gamma_1$  и  $\sin \gamma_1$ . Рассчитав далее из графика величину  $S_2$  и задав коэффициент трения  $\mu$ , по формуле (12) можно определить  $\gamma_2$ , а затем по полученной выше формуле  $T_2 = S_2 / (1 - \cos \gamma_2)$  рассчитать и  $T_2$ .

При достаточно больших силах  $T_1$  и  $T_2$  углы  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  близки к нулю и выражение (11) при этом превращается в формулу Эйлера.

Описанная схема расчета использовалась для сравнительно больших сил  $T_1$  и  $T_2$ , а следовательно, при сравнительно больших изгибающих моментах. При небольших значениях сил этот подход неприменим, поскольку в этом случае будет, очевидно, иметь место не линейный, а точечный контакт.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каган В.М., Щербаков В.П. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №2. С.86...91.
2. Каган В.М., Щербаков В.П. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2003, №4. С.10...18.
3. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, №1. С.61...65.
4. Кудрявин Л.А., Беляев О.Ф., Заваруев В.А. // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2007, №1. С.89...92.
5. Каган В.М. Взаимодействие нити с рабочими органами текстильных машин. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

6. *Цитович И.Г.* Теоретические основы стабилизации процесса вязания. – М.: Легкая и пищевая промышленность, 1984.

7. *Рекач В.Г.* Руководство к решению задач прикладной теории упругости. – М.: Высшая школа, 1973.

Рекомендована кафедрой технологии трикотажного производства. Поступила 29.01.09.

---