

УДК 658.147.2

**МИНИМИЗАЦИЯ ЗАЧЕТА ВЗАИМНЫХ ДОЛГОВ ПРЕДПРИЯТИЙ
ДЛЯ ПРЕДОТВРАЩЕНИЯ КРИЗИСА НЕПЛАТЕЖЕЙ
В ФИНАНСОВО-ПРОМЫШЛЕННЫХ ГРУППАХ***

В.П. ЩЕРБАКОВ, Л.Е. ЗЕРНОВА, Е.С. ЕРОХИН

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

Учтем особенности целевой функции и ограничений. Вследствие кососимметричности матрицы долгов суммировать в (6) достаточно по поддиагональному треугольнику $1 \leq m < n \leq N$:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} (x_{nm} + y_{nm})^2 \rightarrow \min. \quad (7)$$

При этом число неизвестных уменьшается почти вдвое. В данном случае ограничения (5) с учетом соотношений (4) принимают вид:

$$\sum_{m=1}^{n-1} y_{nm} - \sum_{m=n+1}^N y_{mn} = 0, \quad n = \overline{1, N}. \quad (8)$$

* Окончание. Начало см. в № 4 за 2008 г.

Задача условной оптимизации сводится к нахождению минимума функции (7) при

ограничениях (условиях) (8). Составляем классическую функцию Лагранжа

$$L(y_{nm}, \lambda_n) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^{n-1} (x_{nm} + y_{nm})^2 + \sum_{n=1}^N \lambda_n \left(\sum_{m=1}^{n-1} y_{nm} - \sum_{m=n+1}^N y_{mn} \right). \quad (9)$$

Здесь λ_n – неопределенные множители Лагранжа; коэффициент $\frac{1}{2}$ введен для удобства дифференцирования квадратиче-

ской формы. Выпишем необходимые условия экстремума (минимума) первого порядка:

$$\frac{\partial L(y_{nm}, \lambda_n)}{\partial y_{nm}} = 0, \quad \sum_{m=1}^{n-1} y_{nm} - \sum_{m=n+1}^N y_{mn} = 0, \quad n = \overline{1, N}.$$

После дифференцирования получаем систему:

$$(x_{nm} + y_{nm}) + \lambda_n - \lambda_m = 0, \quad 1 \leq m < n \leq N, \quad (10)$$

$$\sum_{m=1}^{n-1} y_{nm} - \sum_{m=n+1}^N y_{mn} = 0, \quad n = 1, \dots, N. \quad (11)$$

Неизвестными являются y_{nm} ($1 \leq m < n \leq N$) и λ_n ($1 \leq n \leq N$). Из (10) получим:

$$y_{nm} = \lambda_m - \lambda_n - x_{nm}. \quad (12)$$

Подставляя эту величину в уравнение связи (11) с учетом $x_{nm} = -x_{mn}$ и $y_{nm} = -y_{mn}$, можем написать линейную систему уравнений:

$$\sum_{m=1}^N \lambda_m = \sum_{m=1}^{n-1} x_{nm} - \sum_{m=n+1}^N x_{mn}, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (13)$$

В правой части написан вектор балансов долгов предприятий (вектор сальдо всех предприятий):

$$b_n(X) = \sum_{m=1}^N x_{nm} = \sum_{m=1}^{n-1} x_{nm} - \sum_{m=n+1}^N x_{mn}. \quad (14)$$

Теперь линейная система для величин λ_m получена в стандартной форме:

$$\sum_{m=1}^N \lambda_m = b_n, \quad 1 \leq n \leq N. \quad (15)$$

Размерность системы – N ; решая ее и подставляя решение в (12), найдем новую матрицу взаимозачета долгов. Элементы матрицы (15) имеют специфический вид и это позволяет получить решение в явном виде [2]:

$$\lambda_N = 0, \quad \lambda_n = \frac{b_N - b_n}{N}$$

$$\text{при } 2 \leq n \leq N-1, \quad \lambda_1 = b_N - \sum_{m=2}^{N-1} \lambda_m. \quad (16)$$

Поставленную задачу можно считать решенной. Дадим схему расчета. Сначала надо составить матрицу долгов x_{nm} , затем вычислить балансы долгов b_n по формуле (15), найти λ_n по формуле (16) и рассчитать новую матрицу Z взаимозачета долгов, используя формулу (12).

Приведем пример взаимозачета в системе с $T=5$ на примере ФПГ с условным

названием "Текстильный холдинг К". Начальная матрица долгов в тыс. руб. за сентябрь 2006 г. дана в табл. 1. Числа в таблице являются реальными, но названия предприятий в последующей таблице закодированы.

Т а б л и ц а 1

n \ m	1	2	3	4
1				
2	900			
3	-700	800		
4	15	-7	-8	
5	-10	10	5	-5

Напомним основные обозначения:
число предприятий $N = 5$;

$n(m) = \overline{1, N}$ – номер предприятия;

x_{nm} ($1 \leq n, m \leq N$) – долг m -го предприятия n -му;

$$x_{nm} > 0, \quad x_{mn} < 0, \quad x_{nm} = -x_{mn}, \quad x_{nn} = 0$$

$$x_{mm} = 0.$$

Представим в измененном виде перечень предприятий (фирм) n и m , входящих в ФПГ "Текстильный холдинг К" (табл. 2).

Т а б л и ц а 2

Предприятие n	Предприятие m
n = 1 – Рязанское представительство	m = 1 – Хлопчатобумажный комбинат 1
n = 2 – Самарское представительство	m = 2 – Комбинат 2
n = 3 – Санкт-Петербургское представительство	m = 3 – Швейное объединение 3
n = 4 – Сургутское представительство	m = 4 – Прядильно-ткацкая фабрика 4
n = 5 – Тюменское представительство	m = 5 – Прядильно-ткацкая фабрика 5

Выпишем последовательно индиви-

дуальные долги:

$$x_{11} = 0, \quad x_{21} = 900, \quad x_{31} = -700, \quad x_{41} = 15, \quad x_{51} = -10,$$

$$x_{12} = -900, \quad x_{22} = 0, \quad x_{32} = 800, \quad x_{42} = -7, \quad x_{52} = 10,$$

$$x_{13} = 700, \quad x_{23} = -800, \quad x_{33} = 0, \quad x_{43} = -8, \quad x_{53} = 5,$$

$$x_{14} = -15, \quad x_{24} = 7, \quad x_{34} = 8, \quad x_{44} = 0, \quad x_{54} = -5,$$

$$x_{15} = 10, \quad x_{25} = -10, \quad x_{35} = -5, \quad x_{45} = 5, \quad x_{55} = 0.$$

В соответствии с формулой (14)

$$b_n(X) = \sum_{m=1}^N x_{nm} = \sum_{m=1}^{n-1} x_{nm} - \sum_{m=n+1}^N x_{nm} \quad \text{вычис-$$

ляем балансы долгов каждого предприятия:

$$b_1 = -\sum_{m=2}^5 x_{m1} = -(x_{21} + x_{31} + x_{41} + x_{51}) = -900 + 700 - 15 + 10 = -205,$$

$$b_2 = \sum_{m=1}^1 x_{2m} - \sum_{m=3}^5 x_{m2} = x_{21} - (x_{32} + x_{42} + x_{52}) = 900 - [800 + (-7) + 10] = 97,$$

$$b_3 = \sum_{m=1}^{3-1} x_{3m} - \sum_{m=4}^5 x_{m3} = (x_{31} + x_{32}) - (x_{43} + x_{53}) = (-700 + 800) - (-8 + 5) = 103,$$

$$b_4 = \sum_{m=1}^{4-1} x_{4m} - \sum_{m=5}^5 x_{m4} = (x_{41} + x_{42} + x_{43}) - x_{54} = 15 - 7 - 8 + 5 = 5,$$

$$b_5 = \sum_{m=1}^{5-1} x_{5m} = x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} = -10 + 10 + 5 - 5 = 0.$$

Неопределенные множители Лагранжа λ_n вычисляем по формулам (16), прини-

мая во внимание $\lambda_N = \lambda_5 = 0$,

$$\lambda_n = \frac{b_5 - b_n}{5} = -\frac{b_n}{5}:$$

$$\lambda_2 = -\frac{b_2}{5} = -\frac{97}{5} = -19,4; \lambda_3 = -\frac{b_3}{5} = -\frac{103}{5} = -20,6; \lambda_4 = -\frac{b_4}{5} = -1,$$

$$\lambda_1 = b_N - \sum_{m=2}^{N-1} \lambda_m = 0 - \sum_{m=2}^4 \lambda_m = 0 + 19,4 + 20,6 + 1 = 41.$$

Изменение каждого долга при взаимозачете y_{nm} рассчитываем по формуле (12):

$$\begin{aligned} y_{12} &= \lambda_2 - \lambda_1 - x_{12} = -19,4 - 41 + 900 = 839,6; \\ y_{13} &= \lambda_3 - \lambda_1 - x_{13} = -20,6 - 41 - 700 = -761,6; \\ y_{14} &= \lambda_4 - \lambda_1 - x_{14} = -1 - 41 + 15 = -27; \\ y_{15} &= \lambda_5 - \lambda_1 - x_{15} = 0 - 41 - 10 = -51; \\ y_{23} &= \lambda_3 - \lambda_2 - x_{23} = -20,6 + 19,4 + 800 = 798,8; \\ y_{24} &= \lambda_4 - \lambda_2 - x_{24} = -1 + 19,4 - 7 = 11,4; \\ y_{25} &= \lambda_5 - \lambda_2 - x_{25} = 0 + 19,4 + 10 = 29,4; \\ y_{31} &= -y_{13} = 761,6; y_{32} = -y_{23} = -798,8; \\ y_{34} &= \lambda_4 - \lambda_3 - x_{34} = -1 + 20,6 - 8 = 11,6; \\ y_{35} &= \lambda_5 - \lambda_3 - x_{35} = 0 + 20,6 + 5 = 25,6; \\ y_{45} &= \lambda_5 - \lambda_4 - x_{45} = 0 + 1 - 5 = -4. \end{aligned}$$

Элементы новой матрицы долгов $z_{nm} = x_{nm} + y_{nm}$ принимают значения:

$$\begin{aligned} z_{12} &= -60,4; z_{13} = -61,6; z_{14} = -42; z_{15} = -41; z_{23} = -1,2; \\ z_{24} &= 18,4; z_{25} = 19,4; z_{34} = 19,6; z_{35} = 5,6; z_{45} = 1. \end{aligned}$$

Конечная матрица долгов после взаимозачета приведена в табл. 2.

Требуемый кредит, необходимый для одновременного производства всех платежей, при начальном состоянии системы составляет в соответствии с (2):

Т а б л и ц а 2

n \ m	1	2	3	4
1				
2	60,4			
3	61,6	1,2		
4	42	-18,4	-19,6	
5	41	-19,4	-5,6	-1

$$X = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |x_{nm}| = 900 + 700 + 800 + 15 + 7 + 8 + 10 + 10 + 5 + 5 = 2460 \text{ тыс. руб.}$$

Минимальный кредит, определенный в результате решения оптимизационной за-

дачи зачета взаимных долгов предприятий, равен

$$Z = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |z_{nm}| = 60,4 + 61,6 + 1,2 + 42 + 18,4 + 19,6 + 41 + 19,4 + 5,6 + 1 = 270,2 \text{ тыс. руб.}$$

Таким образом, сумма взаимных долгов (или требующийся кредит) сокращается в результате решения задачи оптимизации

на 2189,8 тыс.руб. Подобная задача может быть решена в ФПГ за любой период времени.

Процедура взаимозачета имеет смысл только при определенном соглашении между предприятиями. Взаимозачет производится при условиях:

1) все долги x_{nm} известны и признаются предприятиями;

2) при проведении взаимозачета сальдо предприятий остаются неизменными, то есть отдельное финансовое положение каждого в этом смысле не изменяется;

3) часть долгов списывается, а часть переадресовывается.

Отметим, что эти и другие процедуры взаимозачета имеют смысл лишь при выполнении условий 1)...3), то есть при определенном соглашении между предприятиями. Причины, не позволяющие придерживаться данного соглашения, могут быть самыми разнообразными – от нежелания платить долги потому, что это выгодно должнику, до последствий санкций

международных и других организаций, когда финансовые средства предприятий замораживаются. Эти обстоятельства и определяют рамки применимости модели взаимозачета, при построении которой использованы аналогии с моделями естественно-научных объектов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование. – М.: Наука. Физматлит., 1997.

2. Калиткин Н. Н. Оптимальный взаимозачет долгов предприятий. – Математическое моделирование. – 1995, том 7, №1. С. 11...21.

3. Аттетков А. В., Галкин С. В., Зарубин В. С. Методы оптимизации. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов. Поступила 23.04.08.