

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СИСТЕМЫ УПРУГОЙ ЗАПРАВКИ НИТИ НА ШОВАЛЬНОЙ МАШИНЕ

К.М. НОВОСЁЛОВ

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)

В рассматриваемом случае упругая система перемотки одной нити включает в себя следующие элементы: 1) – катушку (бобину) с нитью на шпулярике, с которой происходит сматывание под действием натяжения сматываемой нити; 2) – уча-

сток движущейся натянутой нити между катушкой и натяжным устройством; 3) – натяжное устройство в виде шайбового тормоза – натяжителя; 4) – участок движущейся натянутой нити между шайбовым тормозом и точкой намотки на вал.

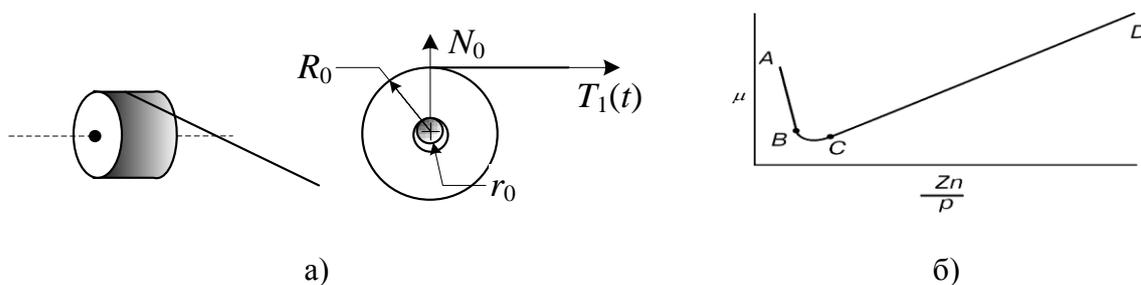


Рис. 1

Рассмотрим отдельные элементы системы. Вращение катушки на оси под действием натяжения нити (рис.1-а) описывается уравнением

$$J_0 \frac{dw_0(t)}{dt} = R_0 T_1(t) - M_{tr}(t), \quad (1)$$

$$J_0 = \frac{m_k R_0^2}{2},$$

где  $J_0$  – момент инерции катушки,  $w_0(t)$  – угловая скорость вращения катушки;  $R_0$  –

радиус сматывания нити с катушки,  $T_1(t)$  – натяжение сматываемой нити,  $M_{tr}(t)$  – момент силы трения катушки об ось,  $m_k$  – масса катушки.

В правой части уравнения (1) стоит разность моментов от натяжения нити и сухого трения катушки об ось. Второе слагаемое делает уравнение нелинейным. В неподвижном состоянии момент силы трения катушки об ось не может превзойти по абсолютной величине значения, зависящего от наибольшей силы трения покоя:

$$M_{tr}(t) = \begin{cases} R_0 T_1(t) & \text{при } |R_0 T_1(t)| \leq \mu_k m_k g r_0 = M_{tr \max}, \quad w_0(t) = 0, \\ M_{tr \max} & \text{при } |R_0 T_1(t)| > M_{tr \max}. \end{cases} \quad (2)$$

Следовательно, при натяжении нити катушка начинает вращаться, а нить сматываться с нее не сразу, а только когда момент от силы натяжения достигнет величины  $M_{tr \max}$ .

Зависимость коэффициента трения от скорости вращения подшипника скольжения может быть аппроксимирована функцией

$$\mu(w) = \mu_0 (\exp(-aw) + bw), \quad w \geq 0. \quad (3)$$

Таким образом, с началом вращения сила трения несколько уменьшается. Поэтому развиваемый ею момент сопротивления вращению также уменьшается, и вращение даже при постоянном натяжении нити происходит с некоторым ускорением. Это ускорение увеличивает длину сматываемой нити в единицу времени, вследствие чего натяжение нити падает. Момент от силы натяжения снижается до величины момента силы трения, и ускорение сматывания уменьшается до нуля.

Трение в подшипниках катушек (или шпуль) на шпулярике должно подбираться оптимальным образом: при малом трении (или его отсутствии в случае замены подшипников скольжения на подшипники качения) нить будет легко сматываться практически без натяжения. При этом ее длина на участке АВ может заметно меняться и влиять на натяжение на этом участке. При излишне большом трении в подшипнике свободного сматывания нити не будет, но могут возникнуть колебания в натяжении из-за заметной величины зоны накопления трения покоя.

В стационарном режиме при постоянном натяжении нити  $T_1(t) = T_{1sr}$  скорость сматывания  $w_0(t) = w_{0sr}$  также постоянна. В этом случае  $M_{tr} = R_0 T_{1sr}$ . Однако вопрос об устойчивости такого стационарного режима остается открытым.

Его решение требует совместного рассмотрения уравнения сматывания нити (1) и уравнения движения нити на участке АВ (рис. 2) между катушкой и шайбовым тормозом.

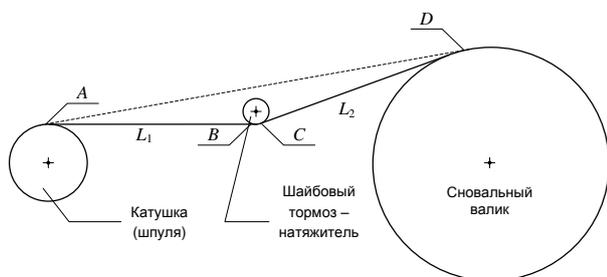


Рис. 2

Будем считать, что нить всегда находится на этом участке в натянутом состоянии. Тогда из условия материального ба-

ланса это последнее уравнение можно записать в виде

$$\rho_1 L_1 \frac{dy_1(t)}{dt} = y_0 R_0 w_0(t) - v_1(t) y_1(t), \quad (4)$$

где  $y_0 = (1 + e_0)^{-1}$ ,  $y_1(t) = (1 + e_1(t))^{-1}$ ;  $0 \leq y_1(t) < 1$ , то есть является линейным дифференциальным уравнением 1-го порядка.

При малом натяжении нити и трении в подшипнике катушки теоретически возможна ситуация, когда длина сошедшей с катушки нити превышает длину  $L_1$ . Происходит провисание нити на участке АВ. В этом случае в уравнении относительное натяжение нити  $e_1(t) = 0$ , переменная  $y_1(t) = 1$ , а длина  $L_1(t)$  становится переменной величиной. Уравнение приобретает вид

$$\rho_1 \frac{dL_1(t)}{dt} = R_0 y_0 w_0(t) - v_1(t) \text{ при } y_1(t) \geq 1. \quad (5)$$

Таким образом, в общем случае при малых натяжениях нити ее натяжение на участке АВ описывается уравнением (4), если  $e_1(t) > 0$ , и уравнением (5), если  $e_1(t) = 0$ .

Правая часть уравнения (5) не зависит от функции  $L_1(t)$ . Поэтому оно интегрируется непосредственно:

$$L_1(t) = \frac{R_0 y_0}{\rho_1} \int_0^t w_0(t) dt - \frac{1}{\rho_1} \int_0^t v_1(t) dt, \quad y_1(t) \geq 1. \quad (6)$$

Связь между уравнениями (1) и (4) или (5) и (6) осуществляется через взаимосвязь между силой натяжения нити  $T_1(t)$  и ее деформацией растяжения  $e_1(t)$ . Эту взаимосвязь, как уже отмечено выше, можно считать соответствующей линейному закону упругости Гука, что значительно упрощает анализ. Также, если в системе перемотки устройство тормоза-натяжителя отсутствует, то эти уравнения достаточны для описания колебаний натяжения, движения и изменения длины нити в процессе перемотки.

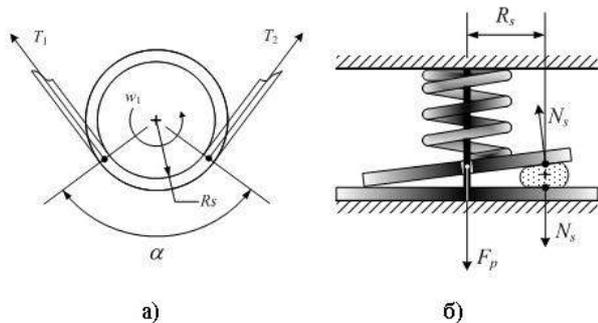


Рис. 3

Рассмотрим модель шайбового тормоза-натяжителя. Связь между натяжением нити, скоростями, геометрическими параметрами устройства и силами, действующими на нить со стороны тормозных шайб, получена в [2]. Хотя модель разработана для мотальной машины, она вполне пригодна и для натяжных устройств этого типа на других машинах. Однако эта модель статическая, тогда как для управления натяжением важна динамическая модель. Кроме того, в нее входят слагаемые, например, силы инерции, которые самим автором оцениваются как незначительные. Поэтому целесообразно построить модель, сделав ее динамической (рис. 3-а).

Используя предыдущие формулы, найдем натяжение нити на выходе из натяжителя:

$$T_2(t) = T_1(t) \exp(\mu_s \alpha) + \frac{N_s(t)}{\alpha} (\exp(\mu_s \alpha) - 1). \quad (7)$$

Из полученных графиков зависимости  $T_2 / T_1$  от угла  $\alpha$  делаем вывод, что натяжение нити на выходе натяжного устройства может значительно (более чем в 2 раза) превысить натяжение нити на входе как за счет увеличения угла охвата натяжного устройства, так и за счет дополнительной нагрузки  $N_s$  на шайбу. Зависимости (7) близки к линейным и в достаточно широком диапазоне варьирования как угла  $\alpha$ , так и нагрузки  $N_s$  могут быть аппроксимированы линейными зависимостями.

Формула (7) описывает статическую зависимость между величинами, хотя некоторые из них являются функциями времени. Для получения динамической моде-

ли устройства напишем динамическое уравнение движения шайбы под действием прижимающей ее к нити пружины. Схематически рассматриваемая система представлена на рис. 3-б.

Введем обозначения:  $N_s$  – сила нормального давления тормозной шайбы на нить;  $F_p$  – сила давления пружины или управляющего устройства на тормозную шайбу;  $R_s$  – расстояние от центра поперечного сечения нити до оси шайбы, которое является плечом момента силы  $N_s$ ;  $R_1$  – радиус точки опоры верхней шайбы на нижнюю шайбу;  $m_s$  – приведенная масса верхней тормозной шайбы, пружины и других подвижных элементов механизма, сосредоточенная в центре подвижной тормозной шайбы;  $y(t)$  – вертикальная координата центра массы подвижных элементов механизма, отсчитанная от точки, в которой при отсутствии нити суммарная сила, действующая на эти элементы, равна нулю;  $k_p$  – жесткость пружины.

Упругая система шайбового тормоза-натяжителя обычно снабжается элементом, демпфирующим колебания, которые создает тормозное усилие, пропорциональное скорости смещения подвижной шайбы. В этом случае уравнение динамики приобретает вид:

$$m_s \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \eta \frac{dy(t)}{dt} + k_p y(t) = (1 + R_s/R_1) N_s(t), \quad (8)$$

где  $\eta$  – коэффициент демпфирования. Уравнения (7) и (8) образуют математическую модель, описывающую натяжение нити в шайбовом тормозе-натяжителе.

## ВЫВОДЫ

1. Получена система уравнений, образующая математическую модель системы упругой заправки одной нити от катушки на шпулярнике до сновального валика.

2. Пользуясь этими уравнениями, можно построить алгоритм получения решения в виде функций времени для натяжения нити на участках АВ и CD линии перемотки, а также все другие зависимые величины, входящие в модель.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Образовательный математический сайт <http://www.exponenta.ru/educat/class/test/hyperb/10.asp>

2. *Ефремов Е.Д.* О натяжении, создаваемом шайбовым тормозом нити мотальной машины М-150 // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 1961, №1.

3. Теория подшипников скольжения. Сайты о подшипниках <http://www.podshipnik.ru> /2008/08/podshipniki-skolzheniya/ и <http://www.tekhnnotorg.ru/podshipniki/подшипники%20скольжения>

Рекомендована кафедрой информационных технологий и систем автоматизированного проектирования. Поступила 24.04.09.

---