

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МЕХАНИЧЕСКИХ СВОЙСТВ ТРИКОТАЖНОГО ПОЛОТНА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Г.В. БАШКОВА, А.П. БАШКОВ, Д.А. АЛЕШИНА, И.Ю. НАТЕРТЫШЕВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

При использовании трикотажных полотен в качестве текстильной основы для композитных материалов важно знать, как поведет себя полотно того или иного переплетения при объемном формовании композитного изделия, а также при дальнейшей эксплуатации под действием многоцикловых или разрушающих нагрузок. Для прогнозирования деформации полотен или оболочек используется метод разбиения всей поверхности на элементарные треугольники или четырехугольники, то есть представление оболочки в виде кусочно-непрерывной поверхности [1]. При этом внутри элементарной площадки деформационные свойства изотропны как в однородной среде. Этот метод пригоден для анализа тканых структур, поскольку в данном случае можно пренебречь иерархическим построением структуры и считать растяжимость полотна сопоставимой с растяжимостью нитей (это возможно толь-

ко при направлении растягивающего усилия вдоль осей нитей основы и утка). Трикотажные полотна по сравнению с тканью имеют большую растяжимость, поскольку в трикотажной петле при общей деформации происходит не только растяжение нити, но и ее изгиб, с перемещением точек фиксации между нитями соседних петель и увеличением размеров самой петли. Поэтому перед рассмотрением деформации всего полотна необходимо проанализировать упругие свойства элементарной ячейки, которые не могут быть изотропными. Как и многие текстильные полотна, трикотаж можно представить в виде плоской сетки или в виде ячеистой структуры. Ячейку, то есть петлю, можно рассматривать как элемент, состоящий из упругих стержней, имитирующих нити, и шарниров, имитирующих точки изгиба и контакта с нитями соседних петель, на который воздействуют растягивающие усилия.

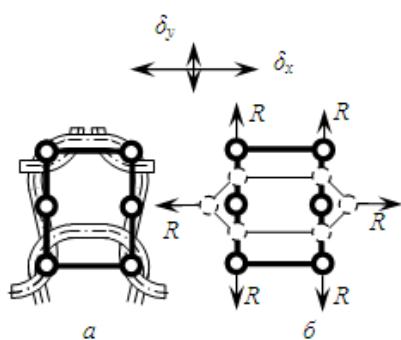


Рис. 1

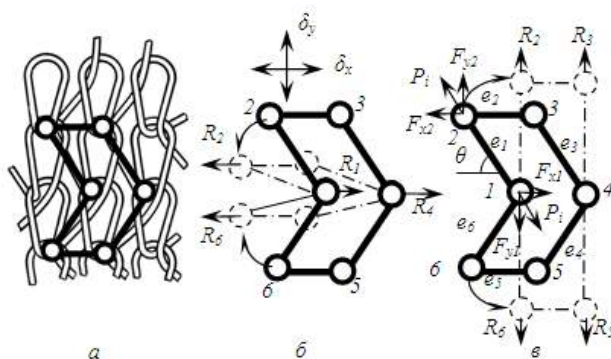


Рис. 2

На рис. 1 и 2 представлены структуры кулирного (рис. 1) и основовязаного (рис. 2) трикотажа (трико) и их шарнирностержневые эквиваленты соответственно. Можно считать, что в кулирном трикотаже петля уже находится в состоянии, близком к предельному, поэтому при продольных нагрузках растяжение значительно ниже,

чем при поперечных (рис. 1-б). Напротив, в петле основовязаного трикотажа в отсутствии нагрузки стержневые элементы находятся в среднем положении (рис. 2-б, в), поэтому растяжимость этой структуры в продольном и поперечном направлениях практически одинакова. Кроме этого, угол перегиба нитей в узлах значительно мень-

ше, а значит меньше силы трения между ними, и за счет этого длина стержней при нагрузке изменяется больше. Следовательно, основовязанный трикотаж более эластичен и поэтому предпочтителен при использовании в качестве текстильной основы композитных материалов, особенно при формовании трехмерных деталей.

Механические свойства ячейки основовязанной структуры в соответствии с методом конечных элементов можно представить в виде матрицы жесткости. Приложим к элементарной ячейке нагрузку R (рис. 2-в). Тогда на типовой элемент ячейки (стержень e_1) в шарнирах действуют силы F_1 и F_2 , которые являются результирующими сил трения в узлах и упругих сил в стержнях. В двумерном пространстве это будут их проекции на координатные оси F_{x1} , F_{y1} и F_{x2} , F_{y2} . При этом смещение

узлов элемента от исходного положения в проекциях на координатные оси обозначим δ_{x1} , δ_{y1} и δ_{x2} , δ_{y2} . В матричной форме силы и смещения будут выглядеть так:

$$F^{e_1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{e_1} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix}^{e_1}, \quad \delta^{e_1} = \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}^{e_1} = \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}^{e_1}. \quad (1)$$

Деформация стержня ненагруженной длины ℓ определяется величиной

$$\left[(\delta_{x2} - \delta_{x1}) \cos \theta + (\delta_{y2} - \delta_{y1}) \sin \theta \right] / \ell.$$

Тогда продольная сила P , приложенная к стержню, будет определяться выражением:

$$P_i = \frac{|\lambda s - akf|}{\ell} \left[(\delta_{x2} - \delta_{x1}) \cos \theta + (\delta_{y2} - \delta_{y1}) \sin \theta \right], \quad (2)$$

где s – площадь поперечного сечения стержня (нити); λ – модуль упругости нити; k – коэффициент трения между нитями в узлах ячейки; f – площадь поверхности трения; a – коэффициент, учитывающий увеличение трения между нитями в узлах по мере их натяжения при деформации ячейки, $a = a(\delta_{xi}, \delta_{yi})$.

Компоненты продольной силы P_i могут быть приравнены к компонентам шарнир-

ных сил F_i , тогда

$$F^{e_1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}^{e_1} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \cos \theta \\ -P \sin \theta \\ P \cos \theta \\ P \sin \theta \end{bmatrix}^{e_1}. \quad (3)$$

Используя выражение (2), можно записать:

$$F_{x1} = \frac{|\lambda s - akf|}{\ell} \left[-(\delta_{x2} - \delta_{x1}) \cos^2 \theta - (\delta_{y2} - \delta_{y1}) \sin \theta \cos \theta \right] = \\ = \frac{|\lambda s - akf|}{\ell} \left[\cos^2 \theta \delta_{x1} + \sin \theta \cos \theta \delta_{y1} - \cos^2 \theta \delta_{x2} - \sin \theta \cos \theta \delta_{y2} \right]. \quad (4)$$

В матричном виде выражение (4) за-

писывается следующим образом:

$$F_{x1} = \frac{|\lambda s - akf|}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

или

$$F^{e_1} = \frac{|\lambda s - akf|}{\ell} \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta \\ -\cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & -\sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Обозначив

$$K_{ij} = \frac{|\lambda s - akf|}{\ell} [\cos^2 \theta, \sin \theta \cos \theta - \cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta],$$

Получим:

$$F^{e_1} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \\ F_{x2} \\ F_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{x1x1} & K_{x1y1} & K_{x1x2} & K_{x1y2} \\ K_{y1x1} & K_{y1y1} & K_{y1x2} & K_{y1y2} \\ K_{x2x1} & K_{x2y1} & K_{x2x2} & K_{x2y2} \\ K_{y2x1} & K_{y2y1} & K_{y2x2} & K_{y2y2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{x1} \\ \delta_{y1} \\ \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

Если матрица в выражении (7) симметрична, то можно записать матричное выражение для элемента e_1

$$F^{e_1} = \begin{bmatrix} K_{11}^{e_1} & K_{12}^{e_1} \\ K_{21}^{e_1} & K_{22}^{e_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

где квадратная матрица коэффициентов K_{ij} представляет собой матрицу жесткости

$$F^{e_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^{e_1} \\ F_2^{e_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{11}^{e_1} & K_{12}^{e_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{21}^{e_1} & K_{22}^{e_1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

которое также может быть представлено в виде:

$$F^e = k^{e_1} \bar{\delta}, \quad (10)$$

где k^{e_1} – расширенная матрица жесткости элемента; $\bar{\delta}$ – вектор узловых смещений системы.

Внешние силы R_1, R_i, \dots, R_6 для каждого i -го узла могут быть выражены через век-

торную сумму их компонентов F_1, F_i, \dots, F_6 в проекциях на оси x и y , то есть

$$R_{xi} = \sum_{i=1}^6 F_{xi}^{e_i}, \quad R_{yi} = \sum_{i=1}^6 F_{yi}^{e_i},$$

Ошибка! Ошибка связи. $R_i = \begin{bmatrix} R_{xi} \\ R_{yi} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \begin{bmatrix} F_{xi}^{e_i} \\ F_{yi}^{e_i} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 F^e. \quad (11)$

Результирующая система уравнений в матричном виде может быть записана следующим образом:

$$R = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_6 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 \begin{bmatrix} F_1^e \\ F_2^e \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ F_6^e \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^6 F^e. \quad (12)$$

Подставив выражение (10) в (12), получим:

$$R = \sum_{i=1}^6 k^{ei} \bar{\delta} = K \bar{\delta}, \quad (13)$$

где матрица $K = \sum_{i=1}^6 k^{ei}$ есть матрица жесткости системы, полученная за счет поэлементного объединения матричных уравнений элементов e_i . Поскольку размеры и упругие свойства стержней могут быть за-

даны в зависимости от вида трикотажного переплетения и самой нити, то все матричные элементы k^{ei} могут быть вычислены с использованием уравнений (7)...(10). Если приложенные усилия R_2, R_3 и смещения δ_2, δ_3 при продольном растяжении известны, то система уравнений (13) может быть решена последовательным исключением, обращением матрицы или выполнением итераций для неизвестных смещений, например, δ_1, δ_4 и реакций R_1, R_4 .

Матричные операции и наглядное представление данной модели как стержневой системы можно реализовать в программной среде MatLab 6.5. Поскольку петля симметрична, на первом этапе в приложении Simulink 4.0 создана динамическая имитационная модель полупетли (рис. 3 – блок-схема имитационной динамической модели полупетли), которая позволяет прогнозировать поведение элемента трикотажной основы композитного материала под воздействием многоцикловых и разрушающих нагрузок (блок IC).

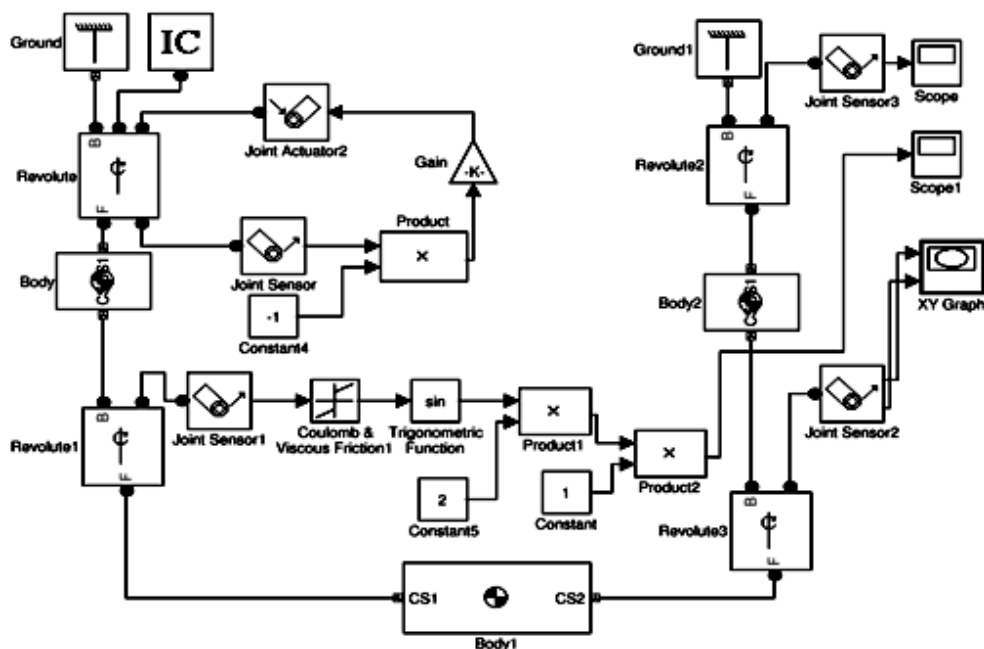


Рис. 3

Задавая в полученной модели жесткость и упругость нити, размер элементов петли (блоки Body), углы поворота (блоки Revolute) и силы трения между нитями

(правая цепочка от блока Revolute 1), можно подобрать оптимальные параметры текстильной основы композита для различных областей применения. Блок XY Graph

позволяет получить фазовый портрет перемещения узлов 2, 3 (рис. 4). Блоки Score и Score 1 выводят осциллограммы возмущающих воздействий (рис. 5 – осциллограммы динамики в узле 1: 1 – угла поворота; 2 – угловой скорости; 3 – углового ускорения) и сил трения в узлах (рис. 6 – осциллограмма сил трения в узлах 2 и 3).

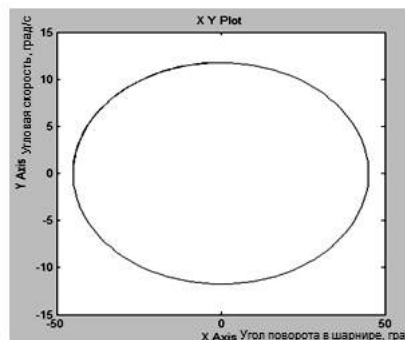


Рис. 4

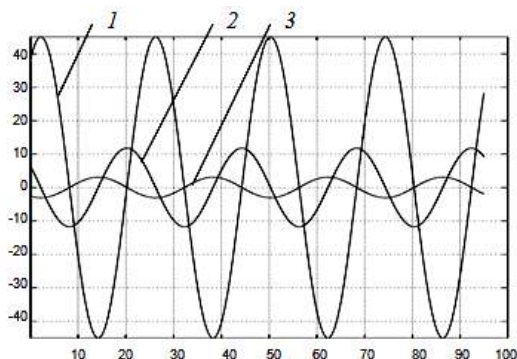


Рис. 5

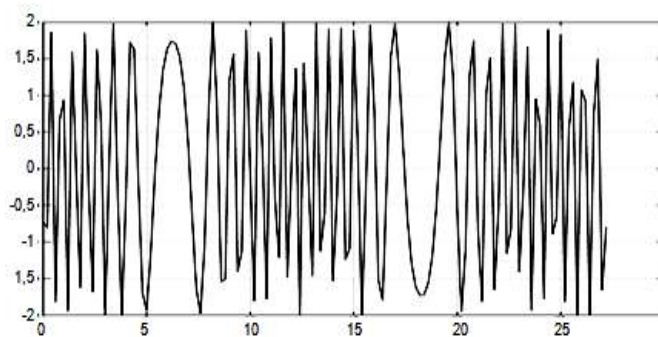


Рис. 6

ВЫВОДЫ

1. Использование метода конечных элементов для представления структуры трикотажного полотна позволяет производить ее механические расчеты при различных видах нагрузки.

2. Динамическая имитационная модель трикотажной петли, полученная в рамках метода конечных элементов, позволяет прогнозировать механические свойства

трикотажа при различных параметрах исходной нити и структуры полотна.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов / Перевод с англ. В.И. Агошкова, под ред. Г.И. Марчука. – М.: Мир, 1977.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 20.04.09.