УДК 519.8

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СКРЫТЫХ ПЕРИОДИЧНОСТЕЙ ДЛЯ МИНИМИЗАЦИИ ЧИСЛА ЭКСПЕРИМЕНТОВ В ИССЛЕДОВАНИИ ОПЕРАЦИЙ

В.В. КЛЕЙНОСОВ

(Московский государственный университет им. А.Н. Косыгина)

Рассматривается не имеющая конкретного алгоритма операция раскладки множества лекал заданного вектором $B=(b_1,b_2,...,b_m)$ на рулон необходимой ширины H и достаточной для выполнения операции длины. Лекала – замкнутые плоские кривые, образующие односвязные или многосвязные области, должны быть уложены на рулон так, чтобы контуры их не пересекались и чтобы при этом использовать минимальную длину рулона L_{min}. Операция оценивается двумя функционалами: L - длина расходуемого рулона; T – время раскладки лекал. В результате проведения операции нужно получить значение $L = L_{min}$ за время $T = T_{min}$.

Очевидно, величины L_{min} и T_{min} зависят от количества всех лекал $\|B\|$, предписанных планом:

$$B=(b_1,b_2,...,b_m),\ \left(\|B\|=\sum_{i=1}^{m} b_i\right).$$

Экспериментально показано, что величина $L_{min}(\|B\|)$ зависит от величины лекал, ширины рулона H, формы лекал и их количества.

В [1] показано, что даже для одного лекала простой формы в виде эллипса, прямоугольника уже требуется определенное искусство для отыскания аналитического выражения для L_{min} (H, a, b) (a, b - полуоси эллипса или стороны прямоугольника). Для двух простых фигур подобного типа задачу аналитического представления L_{min} ставить бессмысленно. Из примеров, приведенных в [1], можно сделать вывод, что для средних по размеру лекал, (в количестве, большем 5, 6) экспериментальная оценка величины L_{min} затруднительна. Можно найти величину, близкую к L_{min}, затратив при этом массу времени.

Для дорогих материалов величина $L_{min}(H,\|B\|)$ очень важна, однако получение ее оценки всегда лимитируется временем ее поиска.

Рассмотрим задачу поиска приближенной величины $\bar{L}_{min}(H,\|B\|)$ в условиях ограниченности отведенного для него времени.

Иными словами, требуется спланировать эксперимент по отысканию $\bar{L}_{min}(H,\|B\|)$ так, чтобы получить достаточно хороший результат для $L_{min}\approx\bar{L}_{min}$ за ограниченное время.

Провести опыт по укладке всех лекал вектора B и измерить необходимое для этого $\bar{L}_{min}(H,\|B\|)$ за ограниченное время не представляется возможным за исключением случая "песок в мешке", (диаметр лекал ничтожно мал по сравнению с H), где имеет место линейное соответствие

$\sum_{i=1}^{n} L_{min}(H, \Delta_i \| B \|) \approx L_{min}(H, \| B \|)$: так, что если $\| B \| = n\Delta \| B \|$, то беря достаточно большое n и замеряя $L_{min}(H, \Delta \| B \|)$, можно быстро (в зависимости от n) получить $L_{min}(H, \| B \|) \approx nL_{min}(H, \Delta \| B \|)$. Поэтому необходимо разбить план B на части $\Delta_i \| B \|$, чтобы в зависимости от формы и величины лекал можно было бы найти $L_{min}(H, \Delta_i \| B \|)$ и, проводя опытную раскладку каждых $\Delta_i \| B \|$ лекал и измеряя каждое $L_{min}(H, \Delta_i \| B \|)$, прийти к результату $L_{min}(H, \| B \|) \approx \sum_{i=1}^{n} L_{min}(H, \Delta_i \| B \|)$.

По-видимому, существует некоторое множество оптимальных разбиений вектора-плана $B = (b_1, ..., b_m)$ на равное (или примерно равное) число частей, обладающих для конкретной разновидности лекал вектора B и предложенных свойств материала рулона такой спецификой, что 1) – для каждой такой части можно будет экспериментально или с помощью моделирования процесса найти $\Delta_i L_{min}$ или величину очень близкую к ней; 2) – величина $\Delta_i L_{min}$ находится за приемлемое время для любого i. Предположительно такие группы будут состоять из 5…10 лекал.

По своей природе вектор-план $B = (b_1, b_2, ..., b_m)$ изначально содержит периоды: первое лекало повторяется b_1 раз, … m-е - b_m раз, то есть с самого начала на количестве опытов можно сэкономить, если уложить на предложенный рулон шириной H первое лекало, для него найти значение L^1_{min}, а затем отрезать кусок рулона этой длины. Затем сделать то же самое со вторым лекалом, с третьим и т.д. Таким образом в качестве $L_{min}(H, B)$ может выступить величина $\sum_{i=1}^{m} b_i L^i_{min}$. Эта процедура самая быстрая, но для дорогих материалов с лекалами малого, по сравнению с H, диаметра, не может считаться экономически оправданной.

Переход на двухлекальный эксперимент для каждого i-го вида лекал потребует, по крайней мере, четности всех значений b_i вектора B, а - на трехлекальный - свойства делимости на три всех b_i. Очевидно, наиболее широкими возможностями "вертикальной" периодики обладают планы с одинаковыми $b_i (i = 1, 2, ..., m)$ и со значениями в виде произведения начальных простых чисел 2,3,5 и т.д.

Геометрическая интерпретация такого плана – прямоугольник шириной m и высотой b_i.

Если, например, m=5, а $b_i = 60 (i = \overline{1, m})$, то можно поставить опыты по определению L^i_{min} для $\Delta b_1 = 5$, $\Delta b_2 = 4$, $\Delta b_3 = 3$, $\Delta b_4 = 10$, $\Delta b_5 = 6$. Количество лекал в группе определяется в основном сложностью формы лекал (чем сложнее форма, тем их меньше в группе и тем быстрее их можно уложить), но и связывается со свойствами материала рулона. Отметим, что идея разбиения лекал на группы в производственных условиях исходит из возможности почти одновременного выполнения работ по определению L^i_{min}.

В рассматриваемом случае, проводя всего 5 параллельных опытов по определению L^i_{min}, примерно за одно и то же время можно получить результат:

$$L_{min}(H, B) \approx 12L^1_{min} + 15L^2_{min} + 20L^3_{min} + 6L^4_{min} + 10L^5_{min}.$$

И это по укладке $\| B \| = 300 = 60 \cdot 5$ лекал.

В дальнейшем, не сильно искажая истину, будем считать, что время оптимальной укладки лекал на рулонный материал в основном определяется количеством укладываемых лекал и будем интересоваться частями плана $\| \Delta B \|$ заданной нормы $\| B \|$.

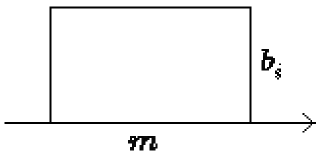

Рис. 1

Прямоугольные планы (рис.1) проливают свет на так называемые "горизонтальные" периоды чисто смешанных стратегий проведения опытов.

Геометрическая форма плана B (рис. 1) позволяет поставить всего один смешанный опыт, с лекалами всех пяти видов (1,1,1,1,1) и получить результат $L_{min}(H,B) \approx 60L_{min}(1,1,1,1,1)$. Можно использовать и другие разложения B:

$$6(10,0,0,0,0)+12(0,5,5,0,0)+12(0,0,0,5,5)=20(3,3,0,0,0)+20(0,0,3,3,0)+10(0,0,0,0,6)=$$

и т.д. со значениями $\|\Delta B\|=10, 6$, … "Вертикальные"; "горизонтальные" и "частично горизонтальные" периодичности для планов с прямоугольной матрицей (рис. 1), в общем случае, могут перейти в скрытые "смешанные" периодичности.

Нас, прежде всего, будет интересовать вопрос: существует ли периодичность достаточно большой частоты заданной нормы, с помощью которой можно было бы представить либо весь план B, либо часть его с некоторым остатком той же (или меньшей) нормы. Категорически утверждать, что такая периодичность существует, пока нет оснований. Однако для любого предложенного плана B можно попытаться найти несколько повторяющихся в нем элементов некоторой частоты, с тем чтобы использовать их в целях экономии количества опытов.

Прежде чем обратиться к примерам, будем считать, не умаляя общности, что координаты вектора B упорядочены: $b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge ... \ge b_m$ (случай равенства разобран выше).

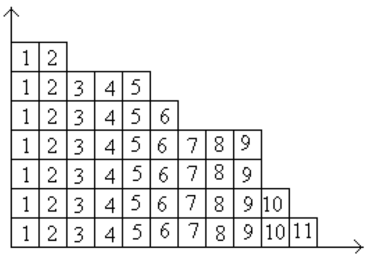

Рис. 2

Выполняя для нормы $\|B\|=52$ (рис. 2) разложения $52\times1=26\cdot2=13\cdot4$ без остатка, ЛПР скорее всего остановится на последнем варианте, выделяя в нем максимальное количество одинаковых четверок лекал. Из рис. 2 видно:

$$B=6(1\ 2\ 3\ 4)+(5\ 5\ 5\ 5)+4(6\ 7\ 8\ 9)+(1\ 2\ 5\ 5)+(6\ 10\ 10\ 11).$$

В скобках указаны номера четверок лекал, подготовленных к укладке. В рассматриваемом варианте предстоит 5 опытов по раскладке лекал и определению для каждой такой раскладки значения L_{min}. Количество экспериментов можно уменьшить до четырех, объединив одиночные "четверки" в предыдущем разложении:

$$(5\ 5\ 5\ 5)+(1\ 2\ 5\ 5)+(6\ 10\ 10\ 11)=(5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 10\ 10)+(1\ 2\ 6\ 11)=2(5\ 5\ 5\ 10)+(1\ 2\ 6\ 11).$$

Подбор лекал в группы и замена на лекала из других групп осуществляется с учетом свойств материала, не говоря уже о том, что эти замены определяют и соответствующие L_{min}.

Привлекательными для ЛПР могут стать эксперименты, проводимые по схеме

$$B=6(1\ 2\ 3\ 4\ 5)+2(6\ 7\ 8\ 9\ 10)+(6\ 7\ 8\ 9\ 6)+(6\ 7\ 8\ 9\ 11)+(1\ 2)$$

или

$$B=5(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)+(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 11)+(7\ 7\ 7\ 7\ 8\ 8)+(8\ 8\ 9\ 9\ 9\ 9)+(1\ 2\ 10\ 10).$$

Для дорогих материалов можно рассмотреть долгий вариант:

$$B=4(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)+(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 10\ 10\ 11)+(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 2).$$

а для дешевых – ускоренный:

$$B=7(1\ 2)+6(3\ 4)+5(5\ 6)+4(7\ 8)+2(9\ 10)+(9\ 5)+(9\ 11).$$

В Ы В О Д Ы

"Частотная" характеристика вектора-плана B в виде набора координат $(b_1, b_2, ..., b_m)$, оказывается, содержит некоторую полезную дополнительную информацию иного характера – так называемые скрытые периоды, используя которые в ряде случаев можно уменьшить количество длительных процедур проведения экспериментов. Поиск скрытых периодичностей – это, скорее, искусство, чем наука, но удачно выполненный поиск какой-нибудь из скрытых периодичностей может значительно сократить время достижения поставленной цели.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Клейносов В.В.* Оптимизация укладки лекал на рулонном материале. Учебное пособие. – М.: МГАЛП, 1994.

Рекомендована кафедрой высшей математики. Поступила 06.02.09.