№ 4 (318) ТЕХНОЛОГИЯ ТЕКСТИЛЬНОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ 2009

УДК 677.021.164

ТЕОРЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВИДА ВОЗДУШНОГО ТЕЧЕНИЯ, ОБРАЗУЮЩЕГОСЯ НА КОЛОСНИКОВОЙ РЕШЕТКЕ

С.Ю. КАПУСТИН, В.Д. ФРОЛОВ, Ф.Р. КАХРАМАНОВ

(Ивановская государственная текстильная академия)

При исследовании воздушных потоков на лентоформирующей машине в составе поточной линии ПЛ-1-КЛ [1] было установлено, что в зоне 4, в отличие от зоны 3 (рис.1), образование воздушных потоков происходит с меньшей интенсивностью . На рис. 1 приняты следующие обозначения: 1 – главный барабан лентоформирующей машины, 2 – колосниковая решетка, установленная под лентоформирующей машиной, 4 – рассматриваемая зона .

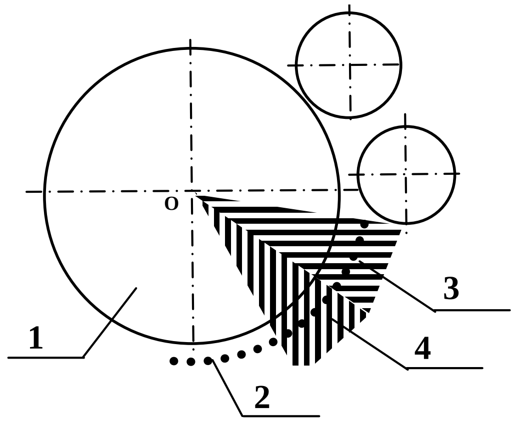

Рис. 1

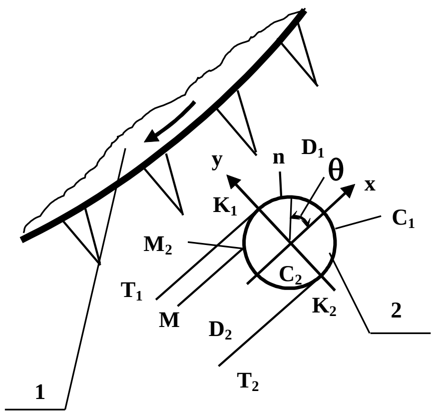

Рис. 2

Рассмотрим элемент колосниковой решетки (рис. 2), где прямые T_1K_1 и T_2K_2 делят контур C на две части: переднюю C_1 и заднюю C_2 .Точки C_1 и C_2 соприкасаются с контуром C в точках K_1 и K_2. Область между T_1K_1 и T_2K_2 обозначим через D_2, остальную область течения обозначим через D_1. На основании проведенных исследований делаем следующие допущения: вихри во всей области D_1 будут отсутствовать, в области же D_2 будет происходить вихреобразование. При этом используем преобразованное уравнение движения вязкой жидкости в форме Ламба [2]:

$$\mu\Delta v + \rho U\frac{\partial \upsilon}{\partial x} - \mathrm{grad} q = 0; \quad \mathrm{div}\upsilon = 0, \qquad (1)$$

причем $q = \rho + \frac{\rho\upsilon^2}{2}$. Выражение (1) при $\mu \to 0$ приобретет следующий вид:

$$\rho U\frac{\partial v}{\partial x} - \mathrm{grad} q = 0,$$

и даст соотношения:

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \rho U\frac{\partial \upsilon_x}{\partial x} = -\rho U\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial q}{\partial y} = \rho U\frac{\partial \upsilon_y}{\partial x}. \qquad (2)$$

При этом $\frac{q}{\rho U} - i\upsilon_y = f(z)$, где $z = x + iy$.

Вводя обозначение

$$w(z) = \int f(z)dz = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

будем иметь $f(z) = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, то есть во всей области исследуемого течения имеем соотношения:

$$q = \rho U \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \upsilon_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (3)$$

причем функция $\varphi(x, y)$ есть решение уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0.$$

Принимаем в области D_1

$$\upsilon_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad (4)$$

В области D_2, из выражения имеем (2):

$$\upsilon_x = \frac{q}{\rho U} + \alpha(y),$$

то есть:

$$\upsilon_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha(y),$$

где

$$\alpha(y) = U - \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_2}.$$

Здесь $\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_2}$ – значение функции $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ в точке M_2 контура C_2.

Пользуясь формулами (3) и (4) и принимая во внимание

$$\upsilon_{n0} = (\upsilon_x - U)\cos(n, x) + \upsilon_y \cos(n, y), \quad (5)$$

где υ_{n0} есть нормальная составляющая скорости относительно воздушного движения, найдем:

$$\upsilon_x \cos(n, x) + \upsilon_y \cos(n, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial n}. \qquad (6)$$

Следовательно, граничное условие на C_1:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = U\cos(n, x).$$

Под n понимается направление внешней нормали к контуру С. Следовательно, граничное условие будет следующим

$$\upsilon_x = U, \quad \upsilon_y = 0 \text{ на } C_1. \qquad (7)$$

После перехода $\mu \to 0$ получим следующее граничное условие

$$\upsilon_x \cos(n, x) + \upsilon_y \cos(n, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(n, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(n, y) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} \quad \text{на} \quad C_1. \qquad (8)$$

Граничные условия на контуре C_2:

$$\upsilon_x = U, \quad \upsilon_y = 0. \qquad (9)$$

В области D_2 имеем следующие соотношения:

$$\upsilon_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \alpha(y), \quad \upsilon_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad (10)$$

Условия (9) создают возможность для определения φ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{на} \quad C_2, \qquad (11)$$

Определяем функцию φ по следующим условиям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=U\cos(n,x) \quad \text{на} \quad C_1, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0 \quad \text{на} \quad C_2, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x}\to 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}\to 0 \ \text{при} \sqrt{x^2+y^2}\to\infty.$$

Положим

$$\varphi = Ux + \varphi_1. \qquad (12)$$

Вводим комплексную функцию $w_1=\varphi_1+i\psi_1$. Для функции φ_1 принимаем следующие граничные условия:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial\varphi}{\partial n}=0 \quad \text{на} \quad C_1, \quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}=0 \quad \text{на} \quad C_2, \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x}\to -U, \quad \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial y}\to 0 \quad \text{при} \quad \sqrt{x^2+y^2}\to\infty. \end{array}\right\} \qquad (13)$$

Через V обозначим абсолютную величину скорости, возникающую при взаимодействии воздушного потока с элементом колосниковой решетки, а через θ – угол, составляемый этой скоростью с осью Ох.

Положим:

$$\frac{dw_1}{dz}=\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}-i\frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=e^{-i\omega(z)}.$$

Тогда получим следующее выражение:

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}=V\cos\theta, \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial y}=V\sin\theta. \qquad (14)$$

Следовательно, имеем:

$$\frac{dw_1}{dz}=V(\cos\theta-i\sin\theta)=Ve^{-i\theta}=e^{\ln V-i\theta},$$

при этом

$$\omega=\theta+i\ln V. \qquad (15)$$

Таким образом, граничные условия для функции θ следующие:

$$\left.\begin{array}{l} \theta_1=\pi \quad \text{для} \quad -\pi\le\theta\le-\dfrac{\pi}{2}, \\ \theta_1=\dfrac{3\pi}{2}+\theta \quad \text{для} \quad -\dfrac{\pi}{2}\le\theta<0, \\ \theta_1=\dfrac{\pi}{2}+\theta \quad \text{для} \quad \pi<\theta\le\dfrac{\pi}{2}, \\ \theta_1=\pi \quad \text{для} \quad \dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\pi. \end{array}\right\} \qquad (16)$$

Применим теперь формулу Шварца, определяющую аналитическую функцию $f(z)=u+i\upsilon$:

$$f(z)=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_1(\theta)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta+i\alpha=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}u_1(\theta)d\theta-\frac{a}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{u_1(\theta)e^{i\theta}d\theta}{ae^{i\theta}-z}+i\alpha. \qquad (17)$$

В этой формуле α есть произвольная постоянная.

Формула (17) применима для рассматриваемого случая, поскольку функция $u_1(\theta)$ в нескольких точках терпит разрыв: а именно: в этом случае граничное значение вещественной части функции $f(z)$ буде равно $u_1(\theta)$ во всякой точке контура единичного круга, в которой $u_1(\theta)$ непрерывна.

Следовательно:

$$\omega=\theta+i\ln V=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\theta_1(\theta)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta+i\alpha. \qquad (18)$$

Теперь формулы (16) и (18) позволяют написать:

$$\omega=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\pi\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta+i\ln U,$$

но:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta=-2\pi,\ \text{если}\quad |z|>a,$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}\left[-1+\frac{2ae^{i\theta}}{ae^{i\theta}-z}\right]d\theta=\left[-\theta+\frac{2}{i}\ln(ae^{i\theta}-z)\right]_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{0}=$$

$$=-\frac{\pi}{2}+\frac{2}{i}\ln\frac{z-a}{z+ai}. \qquad (19)$$

Поэтому получаем следующее выражение для функции $\omega(z)$:

$$\omega(z)=\theta+i\ln V=\pi+i\ln V+\frac{1}{2i}\ln\frac{z^2+a^2}{(z-a)^2}-\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}d\theta. \qquad (20)$$

Следовательно, при $|z|>1$ имеем следующее разложение:

$$\frac{ae^{i\theta}+z}{ae^{i\theta}-z}=-1+\frac{2ae^{i\theta}}{-z\left(1-\frac{a}{z}ae^{i\theta}\right)}=-1-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{z^n}e^{in\theta}.$$

И далее

$$\ln\frac{z^2+a^2}{(z-a)^2}=\ln\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)-2\ln\left(1-\frac{a}{z}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{a^n}{z^n};$$

Значит при $|z|>1$:

$$\omega(z)=\pi+i\ln U-i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{2}{\pi n^2}\sin\frac{n\pi}{2}\right)\frac{a^n}{z^n}=$$

$$=\pi+i\ln U-i\left(1-\frac{2}{\pi}\right)\frac{a}{z}-\frac{ia^2}{2z^2}-\ldots \qquad (21)$$

Отсюда:

$$\frac{dw_1}{dz}=e^{-i\omega(z)}=-U\left\{1-\frac{\pi-2}{\pi}\frac{a}{z}-\ldots\right\}$$

и окончательно, обозначая через $w=\varphi+i\psi$ комплексный потенциал абсолютного движения в области D_1, будем иметь:

$$\frac{dw}{dz}=\frac{dw_1}{dz}+U=U\frac{\pi-2}{\pi}\frac{a}{z}+\ldots \qquad (22)$$

Теперь найдем распределение скорости V_1 вдоль элемента колосниковой решетки. Для этого нам необходимо найти мнимую часть функции $\omega(z)$ при $z=ae^{i\theta_0}$.

Тогда имеем:

$$\frac{ae^{i\theta}+ae^{i\theta_0}}{ae^{i\theta}-ae^{i\theta_0}}=\frac{e^{i\frac{\theta-\theta_0}{2}}+e^{-i\frac{\theta-\theta_0}{2}}}{e^{i\frac{\theta-\theta_0}{2}}-e^{-i\frac{\theta-\theta_0}{2}}}=-i\mathrm{ctg}\frac{\theta-\theta_0}{2}. \quad (23)$$

Производя необходимые преобразования при помощи (19), (20), получаем следующую формулу:

$$V_1=Ue^{f\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta_0}{2}\right)+f\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta_0}{2}\right)}\times\left|\sin\frac{\theta_0}{2}\right|\left|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right|^{\frac{\theta_0}{\pi}-\frac{1}{2}}\left|\sin\left(\frac{\theta_0}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|^{-\frac{\theta_0}{\pi}-\frac{1}{2}}. \quad (24)$$

Далее, используя формулы (12), (14), (16), найдем следующие выражения для значений $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ на контуре элемента колосниковой решетки:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-V_1+U,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=0\quad \text{для}\quad -\pi\le\theta\le-\frac{\pi}{2},\ \text{и}\ \frac{\pi}{2}\le\theta\le\pi,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=V_1\sin\theta+U,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-V_1\cos\theta\quad \text{для}\quad -\frac{\pi}{2}\le\theta\le 0,\\
&\frac{\partial\varphi}{\partial x}=-V_1\sin\theta+U,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=V_1\cos\theta\quad \text{для}\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}\right\} \quad (25)$$

На основании (12), (14), (25) будем иметь следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned}
&\upsilon_x=V\cos\theta+U,\quad \upsilon_y=V\sin\theta\quad \text{в}\quad D_2,\\
&\upsilon_x=V\cos\theta+U+V_1,\quad \upsilon_y=V\sin\theta\quad \text{в}\quad D_1.
\end{aligned}\right\} \quad (26)$$

При переходе из области D_1 в область D_2 составляющая скорости υ_x терпит разрыв, величина которого равна:

$$\left(V_1\right)_{\theta=\frac{\pi}{2}}=U\sqrt{2}. \quad (27)$$

Это означает, что вдоль прямых линий T_1K_1 и T_2K_2, отделяющих область D_1 от D_2, имеются вихревые слои.

ВЫВОДЫ

Полученная методика дает возможность управлять поведением волокна с учетом характера воздушного потока, возникающего около колосниковой решетки, и на основе этого проектировать новые устройства для очистки волокна

ЛИТЕРАТУРА

1. *Капустин С.Ю.* Усовершенствование технологий в процессе очистки длинноволокнистых материалов на лентоформирующей машине в составе поточной линии ПЛ-I-КЛ: Дис….канд. техн. наук. – Иваново, 1992.

2. *Кочин И.Е., Кобель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. – Часть 1/ Под ред. И.А. Кобеля. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1948.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 19.05.09.