УДК 677.051.178.2

НЕУСТАНОВИВШЕЕСЯ ДВИЖЕНИЕ ВОЛОКНИСТОЙ МАССЫ С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ И ДАВЛЕНИЕМ

И.В. ФРОЛОВА, Е.Ю. ГРИГОРЬЕВА

(Ивановская государственная текстильная академия)

Вследствие неразрывности потока объем выделенного параллелепипеда будет заполнен движущейся массой волокна и воздушного потока. При этом поступающая и выходящая из параллелепипеда сжимаемая масса в бункерном питателе будет различна, что обусловлено непостоянством величин скорости ω и плотности ρ.

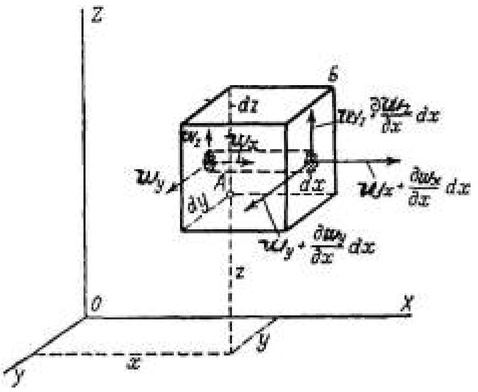

Рис. 1

Через плоскость А масса движется под действием скорости ω_x, параллельной оси OX (рис.1), которая, как и плотность ρ, постоянны в этом случае во всех точках плоскости А:

$$\omega_x = F_1\,(x, y, z, \tau),$$
$$\rho = F_2\,(x, y, z, \tau),$$

где τ – время; F_1, F_2 – материальные потоки.

Для плоскости Б эти величины будут равны:

$$\omega_x + \frac{\partial \omega_x}{\partial x}\,dx, \quad \rho + \frac{\partial \rho}{\partial x}\,dx.$$

Через площадку dydz за единицу времени уходит материальный поток, выраженный в единицах массы:

$$d\,Mx_1 = (p\ \omega x)\,dydz.$$

Масса материального потока dydz противоположной площадки:

$$d\,Mx_2 = \left[\rho\omega_x + \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\omega_x\right)dx\right]dydx\,.$$

Тогда приращение массы материального потока за единицу времени, вызванное непостоянством значений ω_x и p на противоположных площадках, следующее:

$$\Delta M_X = \frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\omega_X\right)dxdydz\,.$$

Для материальных потоков масс перпендикулярных к осям OY и OZ, получим:

$$\Delta M_Y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\omega_y\right)dxdydz\,,$$

$$\Delta M_Z = \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\omega_z\right)dxdydz$$

Полное приращение массы материального потока в параллелепипеде равно:

$$\Delta M = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\rho\omega_X\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\rho\omega_Y\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\omega_Z\right)\right]dxdydz\,. \quad (1)$$

При неразрывности потока изменение массы в объеме dxdydz связано с изменением p в этом объеме, тогда:

$$\Delta M = -\frac{\partial \rho}{\partial \tau}dxdydz\,. \qquad (2)$$

Приравняв выражения (1) и (2) для ΔM, находим:

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega_X)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega_Y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega_Z)\right]dxdydz=-\frac{\partial\rho}{\partial\tau}dxdydz. \quad (3)$$

После преобразований уравнения (3) получим уравнение неразрывности или сплошности:

$$\frac{\partial\rho}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega_X)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega_Y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega_Z)=0 \quad (4)$$

Для установившегося движения $\frac{\partial\rho}{\partial\tau}=0$:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho\omega_X)+\frac{\partial}{\partial y}(\rho\omega_Y)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho\omega_Z)=0$$

или

$$\operatorname{div}\left(\overrightarrow{\rho\omega}\right)=0.$$

Из уравнения (4) при условии $\frac{\partial\rho}{\partial\tau}=0$ находим для данного пространства, при установившемся движении материального потока, что он не изменяет своей массы при ее входе и выходе.

Уравнение движения основано на известном законе механики: сила равна массе, умноженной на ускорение, при этом в любой точке движущегося потока обусловливается равновесие сил: тяжести, давления (перепад давления) и трения.

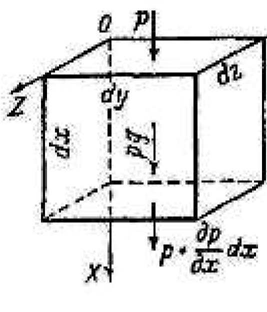

Рис. 2

Выделим в материальном потоке элементарный параллелепипед объемом dV с ребрами dx, dy, dz и найдем проекции на ось OX (рис. 2) сил: тяжести, давления и трения, действующих на этот элементарный объем.

Для силы тяжести, приложенной в центре тяжести элемента dV, находим:

$$q_x\,P\,dV = q_x\,P\,dx\,dy\,dz, \quad (5)$$

где q_x – проекция ускорения силы тяжести (м/с^2) на OX.

Сила давления (при удельном давлении материального потока β, кг/м^2) на верхнюю плоскость элемента составит Pdydz, а на нижнюю действует сила:

$$-\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}dx\right)dydz,$$

где $\frac{\partial P}{\partial x}dx$ – гидростатическое давление (измененное в направлении оси OX, по всей длине ребра dx). Эта сила действует против направления движения материального потока.

Проекция рассмотренных равнодействующих сил давления:

$$P\,dydz-\left(P+\frac{\partial P}{\partial x}\right)dydz-\frac{\partial P}{\partial x}dxdydz. \quad (6)$$

В сечении *y* имеем силу трения, равную $-S\,dxdz$ и направленную против движения, так как скорость движения материального потока меньше, чем в самом элементе (рис.3).

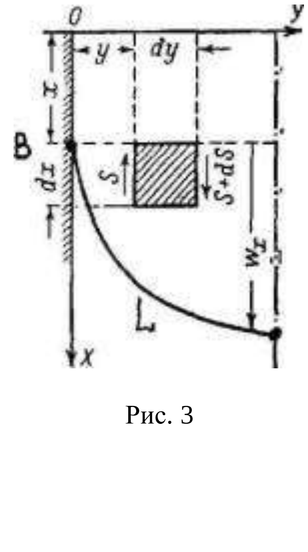

Рис. 3

В сечении y + dy сила трения равна $\left(S+\frac{\partial S}{dy}dy\right)dxdz$ и направлена в сторону движения в связи с тем, что в данном случае скорость движения материального потока больше, чем в самом элементе, тогда проекция сил трения равна:

$$\left(S+\frac{\partial S}{\partial y}dy\right)dxdz - S\,dxdz = \frac{dS}{dy}dxdydz\,, \quad (7)$$

где S – сила трения на единицу поверхности.

Согласно закону Ньютона $S=\mu\frac{d\omega_X}{dy}$, где μ – вязкость среды. Подставляя значение S в уравнение (7), имеем:

$$\frac{dS}{dy}dV = \mu\frac{d^2\omega^2}{dy^2}dV\,.$$

Когда скорость ω_x изменяется во всех трех направлениях, проекция сил трения на ось OX равна:

$$\mu\left(\frac{\partial^2\omega_X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_X}{\partial z^2}\right)dV = \mu\,\nabla^2\omega_X dV, \quad (8)$$

где символ $\nabla^2\omega_X$ – оператор Лапласа обозначает сумму вторых частных производных от проекции скорости на ось OX и выражает следующую операцию:

$$\nabla^2 = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\,.$$

Складывая проекции (5), (6) и (8), получим проекцию на ось OX равнодействующей всех сил, приложенных к объему dV:

$$\left[\rho\, q_X - \frac{\partial P}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\omega_X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_X}{\partial z^2}\right)\right]dV\,, \quad (9)$$

которая равна произведению массы элемента dV на ускорение $\frac{D\omega_X}{d\,\tau}$:

$$\rho\frac{D\omega_X}{d\tau}dV = \rho\left[\frac{\partial\omega_X}{\partial\tau}+\omega_X\frac{\partial\omega_X}{\partial x}+\omega_Y\frac{\partial\omega_X}{\partial y}+\omega_Z\frac{\partial\omega_X}{\partial z}\right]dV\,, \quad (10)$$

где $\frac{D\omega_X}{d\tau}$ – символ полной производной ω_X по τ, когда изменение скорости ω_X в данной точке определяется локальной производной ω_X по τ:

$$\frac{\partial\omega_X}{\partial\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\omega_X(M,\tau+\Delta\tau)-\omega_X(M,\tau)}{\Delta\tau}\,,$$

где M – постоянная геометрическая точка в пространстве

Согласно формулам (9) и (10) получим:

$$\rho\frac{d\omega_X}{\partial\tau}+\rho\left(\omega_X\frac{\partial\omega_X}{\partial x}+\varpi_Y\frac{\varpi_X}{\partial y}+\omega_Z\frac{\omega_X}{\partial z}\right) = \rho\, q_X - \frac{\partial\rho}{\partial x}+\mu\left(\frac{\partial^2\omega_X}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_X}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_X}{\partial z^2}\right). \quad (11)$$

Для равнодействующих проекций сил на оси OY и OZ имеем:

$$\rho\frac{\partial\omega_Y}{\partial\tau}+\rho\left(\omega_X\frac{\partial\omega_Y}{\partial x}+\omega_Y\frac{\partial\omega_Y}{\partial y}+\omega_Z\frac{\partial\omega_Y}{\partial z}\right)=\rho q_Y=\frac{\partial\rho}{\partial_Y}+\mu\left(\frac{\partial^2\omega_Y}{\partial x^2}+\frac{\partial\omega_Y}{\partial y^2}+\frac{d^2\omega_Y}{\partial z^2}\right),\qquad(12)$$

$$\rho\frac{\partial\omega\tau}{\partial\tau}+\rho\left(\omega_X\frac{\partial\omega_Z}{\partial x}+\omega_Y\frac{\partial\omega_Z}{\partial y}+\omega_Z\frac{\partial\omega_Z}{\partial z}\right)=\rho q_Z-\frac{\partial\rho}{\partial z}+\mu\left(\frac{\partial^2\omega_Z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\omega_Z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\omega_Z}{\partial z^2}\right).\qquad(13)$$

Уравнения движения (11), (12) и (13) составляют систему дифференциальных уравнений Навье-Стокса, что справедливо для ламинарного и турбулентного движения. Тогда при постоянном μ уравнения (11), (12) и (13) можно представить одним векторным уравнением:

$$\rho\frac{\overrightarrow{\partial\omega}}{\partial\tau}+\rho\left(\vec{\omega},\mathrm{grad}\right)\vec{\omega}-\overrightarrow{q\rho}-\mathrm{grad}\rho+\mu\nabla^2\vec{\omega},$$

или

$$\frac{\overrightarrow{\partial\omega}}{\partial\tau}+\left(\vec{\varpi},\mathrm{grad}\right)\vec{\omega}=\vec{q}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\rho+\upsilon\nabla^2\vec{\omega},\ (14)$$

где $\upsilon=\frac{\mu}{\rho}$ – коэффициент кинематической вязкости (м^2/с).

Для упрощения уравнения (14) применим основную теорему, связанную с понятием дивергенция – теорема Остроградского.

Пусть область V пространства является полем некоторого вектора $\vec{A}$. Обозначим через S поверхность, ограничивающую этот объем, и устанавливаем связь между тройным интегралом, взятым по объему, и интегралом взятым по поверхности S:

$$\iiint\limits_V \mathrm{div}\,\vec{A}\,dV=\iint\limits_S A_n dS.\qquad(15)$$

Рассмотрим в векторном поле кривую L, когда линейным интегралом вектора $\vec{A}$ вдоль кривой L (рис.3) называется криволинейный интеграл, взятый по кривой L:

$$\int\limits_L\left(A_X dx+A_Y dy+A_Z dz\right),\qquad(16)$$

Если кривая замкнутая, то линейный интеграл (16) называется – циркуляция вектора $\vec{A}$ по кривой L. Операцию "вихрь" определяем по каждому члену уравнения (14) для любого вектора $\vec{N}$:

$$\mathrm{rot}\,\vec{N}=\left(\frac{\partial N_Y}{\partial x}-\frac{\partial N_X}{\partial y}\right)\vec{R}+\left(\frac{\partial N_Z}{\partial y}-\frac{\partial N_Y}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial N_X}{\partial z}-\frac{\partial N_Z}{\partial x}\right)\vec{j}\ ,$$

где $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{R}$ – единичные векторы, направленные по осям координатам x, y, z.

В уравнении (14) $\vec{q}$ – постоянный вектор, тогда $\mathrm{rot}\,\vec{q}=0$

$$\mathrm{grad}\,\rho=\frac{\partial P}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial P}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial P}{\partial z}\vec{R}.\qquad(17)$$

Преобразуем $\mathrm{grad}\,\rho$ согласно операции "вихрь":

$$\mathrm{rot\,grad}\,P=\left(\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}-\frac{\partial^2 P}{\partial y\partial x}\right)\vec{R}.....=0,$$

откуда $\left(\vec{q}-\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,P\right)$ – член в уравнении (14) исключается и уравнение имеет вид:

$$\mathrm{rot}\frac{\overrightarrow{\partial\omega}}{\partial\tau}+\mathrm{rot}\left(\vec{\omega},\mathrm{grad}\right)\vec{\omega}=\upsilon\,\mathrm{rot}\nabla^2\vec{\omega}.\qquad(18)$$

Уравнение движения (18) представляется векторным уравнением, где единичные векторы направлены по всем осям координат, и характеризует векторное поле кривую L. При этом линейный интеграл (16) зависит не только от конечной и начальной точек интегрирования, но также и от кривой, по которой производится интегрирование. Интегралы (16), взятые по разным кривым, соединяющие данные фиксированные точки В и К (рис.3), – различны.

Однако если подынтегральное выражение в линейном интеграле (16) есть полный дифференциал dφ некоторой однозначной функции φ (x, y, z):

$$A_X dx + A_Y dy + A_Z dz = d\varphi, \qquad (19)$$

то интеграл (16) не зависит от вида кривой, а зависит только от начальной В и конечной К пути интегрирования.

Поэтому, зная эти точки, можно надежно выбрать автоматическое регулирование движения материального потока в бункерном питателе, улучшая качественные характеристики выходного продукта.

Дальнейшее развитие и эффект автоматического регулирования зависят от положения этого регулятора на неподвижной стенке бункерного питателя.

В этом случае интеграл (16) равен разности значений функции φ (x, y, z) в конечной точке К и начальной В точках:

$$\int_L \left(A_X dx + A_Y dy + A_Z dz \right) = \\ = \varphi\left(X_1, Y_1, Z_1\right) - \varphi\left(X_0, Y_0, Z_0\right).$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя. – Пер. с нем. Г.А. Вольперта / Под ред. В.С. Авдуевского и В.Я. Лихушина. – М.: Изд-во Иностр. лит-ры, 1956.

Рекомендована кафедрой механической технологии текстильных материалов. Поступила 14.04.09.