УДК 677. 21. 021

АНАЛИЗ РАДИАЛЬНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ СЫРЦОВОГО ВАЛИКА ПИЛЬНОГО ДЖИНА

Р.Ф. ЮНУСОВ

(ОАО "Paxta tozalash IIChB", г. Ташкент)

В рассматриваемом случае [1] уравнение равновесия сводится к виду

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\sigma_r-\sigma_\theta+\rho r^2\omega^2=0\,, \qquad (1)$$

где ρ – массовая плотность вязкоупругого материала; ω = ω(t) – угловая скорость вращения. Если главные деформации обозначить через ε_r, ε_θ и ε_z, а радиальное перемещение через u, то при плоской деформации имеем

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}\,,\ \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}\,,\ \varepsilon_z=0\,. \qquad (2)$$

С целью упрощения выкладок предполагается, что материал ведет себя упруго при объемном расширении, имеет объемный модуль K и является вязкоупругим по отношению к сдвигу. Если тело находилось в невозмущенном состоянии до момента t=0, то определяющие уравнения будут иметь вид:

$$\begin{gathered}\sigma_r+\sigma_\theta+\sigma_z=3K\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right),\\ \sigma_\theta-\sigma_r=2\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}(\varepsilon_\theta-\varepsilon_r)d\tau=2\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{u}{r}-\frac{\partial u}{\partial r}\right)d\tau\,,\\ \sigma_\theta-\sigma_z=2\int_0^t G(t-\tau)d\tau=2\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{u}{r}\right)d\tau\,.\end{gathered} \qquad (3)$$

Граничные условия, которым надо удовлетворять внешним импульсным напряжениям:

$$\sigma_r=[0(t),t]=-p(t)\,, \qquad (4)$$

внутренней границе:

$$U_r(b,t)=0. \qquad (5)$$

Четыре уравнения (1), (2), (4) и (5) служат для определения четырех неизвестных: σ_r, σ_θ, σ_z и ε_θ (через u). Однако два граничных условия содержат только два из них : σ_r и ε_θ и потому надо исключить σ_r и σ_z, что и будет сделано ниже. Комбинируя уравнения (1), (2) и (3), получаем:

$$r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+pr^2\omega^2=-2r\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial r\partial\tau}d\tau\,,$$

откуда, интегрируя по r, находим:

$$\sigma_r=-\frac{1}{2}pr^2\omega^2-2\int_0^t G(t-\tau)\frac{\partial^2\varepsilon_\theta}{\partial\tau}d\tau+f(t)\,,$$

где f(t) – произвольная функция. Исключая разрыв при t = 0 и интегрируя по частям, получаем:

$$\sigma_r(r,t)=f(t)-\frac{1}{2}pr^2\omega^2(t)-2G(0)\varepsilon_\theta(r,t)-2\int_0^t \varepsilon_\theta(r,t)G'(t-\tau)d\tau\,,$$

где штрихом обозначена производная по аргументу. Отсюда, используя граничные условия (4) и (5), получаем для $\sigma_r(b,t)$ интегральное уравнение второго рода типа свертки:

$$\sigma_r(b,t)+\frac{2\mu}{E}\int_{0^-}^{t}G'(t-\tau)\sigma_r(b,t)d\tau=\frac{\mu B}{E}\left[\frac{1}{2}pr^2\omega^2(t)-f(t)\right], \tag{6}$$

где

$$\mu=\frac{E}{2G(0)-B}.$$

Чтобы получить второе интегральное уравнение для $\sigma_r(b,t)$ и f(t), исключаем вначале σ_r из уравнения (6), затем σ_θ при помощи уравнения (3) и, наконец, и при помощи (6). Это дает:

$$3\sigma_r=\frac{3K}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_\theta)+2\int_{0^-}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial^2}{\partial\tau}\left(\varepsilon_\theta+2r\frac{\partial_\theta}{\partial r}\right)d\tau. \tag{7}$$

Граничное условие, содержащее ε_θ, уже было использовано, а в другое входит только σ_r. Поэтому в (7) члены, содержащие ε_θ, исключаются снова при помощи уравнений (2) и (3) и заменяются на σ_r и f(t). Член, содержащий ε_θ в подынтегральном выражении, исключается путем сложения (3) и удвоением уравнения (2), что с учетом (7) приводит к равенству

$$\Omega(r,t)=\frac{1}{2}f(t)-\frac{5}{4}pr^2w^2+\frac{3K}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_\theta), \tag{8}$$

где для удобства введено обозначение

$$\Omega(r,t)=2\sigma_r+r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma_r).$$

Складывая удвоенное (3) с уравнением (2), получаем:

$$\Omega(r,t)=2f(t)-2pr^2\omega^2(t)-\frac{2}{r}\int_{0}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial^2(r^2\varepsilon_\theta)}{\partial r\partial\tau}d\tau,$$

причем член $\frac{\partial}{\partial r}(r^2\varepsilon_\theta)$ исключается при помощи уравнения (8). В результате имеем:

$$\Omega(r,t)=\frac{4}{3K}\int_{0^-}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial\Omega(r,t)}{\partial\tau}d\tau=2f(t)-2pr^2\omega^2(t)-\frac{2}{r}\int_{0^-}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial^2(r^2\varepsilon_\theta)}{\partial r\partial\tau}d\tau+$$
$$+\frac{1}{3K}\int_{0^-}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}[2f(\tau)-2pr_2\omega^2(\tau)]d\tau. \tag{9}$$

Как было отмечено ранее, трудно ввести в рассмотрение граничное условие на выгорающей поверхности, если не исклю чена функция R(t), определяемая равенством:

$$R(t)=\frac{4}{3K}\int_{0^-}^{t}G(t-\tau)\frac{\partial R(\tau)}{\partial\tau}d\tau=2G(t).$$

Используя ассоциативное свойство сверток, перепишем уравнение (9) в виде

$$\Omega(r,t)=\left[2-\frac{R(0)}{K}\right]f(t)-pr^2\omega^2(t)+\frac{1}{K}\int_{0^-}^{t}R(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[\frac{1}{2}pr^2\omega^2(\tau)-f(\tau)\right]d\tau.$$

Исключение разрыва при t = 0 и интегрирование по частям дают

$$\Omega(r,t)=\left[2-\frac{R(0)}{K}\right]f(t)-pr^2\omega^2(t)\left[2-\frac{R(0)}{K}\right]-\frac{1}{K}\int_{0^+}^{t}R'(t-\tau)f(\tau)d\tau+\frac{pr^2}{2K}\int_{0^+}^{t}R'(t-\tau)\omega^2(\tau)d\tau.$$

Учитывая теперь (9), интегрируя последнее равенство по r и используя граничное условие (4), получаем:

$$r^2\sigma_r(r,t)=\frac{1}{2}[r^2-a^2(t)]\left[\left\{2-\frac{R(0)}{K}\right\}f(t)-\frac{1}{K}\int_{0^+}^{t}R'(t-\tau)f(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\frac{p}{4}[r^4-a^4(t)]\left[\left\{2-\frac{R(0)}{2K}\right\}\omega^2(t)-\frac{1}{2K}\int_{0^+}^{t}R'(t-\tau)\omega^2(t)d\tau\right]-a^2(t)p(t).$$

Это равенство имеет место, в частности, при r = b, и потому

$$b^2\sigma_r(b,t)=\frac{1}{2}[b^2-a^2(t)]\left[\left\{2-\frac{R(0)}{K}\right\}f(t)-\frac{1}{K}\int_{0^+}^{t}R'(t-\tau)f(\tau)d\tau\right]-$$

$$-\frac{p}{4}[b^4-a^4(t)]\left[\left\{2-\frac{R(0)}{2K}\right\}\omega^2(t)-\frac{1}{2K}\int_{0^+}^{t}R'(t-\tau)\omega^2(t)d\tau\right]-a^2(t)p(t).$$

Это интегральное уравнение типа свертки для f(t), которое вместе с (9) образует систему интегральных уравнений для неизвестных функций f(t) и $\sigma_r(r,t)$. Как будет показано ниже, их можно представить численно путем совместного решения их представления в конечно-разностной форме. Как только функция f(t) определена, $\sigma_r(r,t)$ можно получить из уравнения (10), после чего (9) определяется из равенства

$$\sigma_\theta(r,t)=\Omega(r,t)-\sigma_r(r,t)+pr^2\omega^2(\tau).$$

Наконец, $\varepsilon_\theta(r, t)$ и u(r, t) можно получить, решая интегральное уравнение (4) при известных $\sigma_r(r, t)$ и f(t), или при помощи прямого интегрального представления, получающегося обращением уравнения (3), которое дает

$$\varepsilon_\theta(r,t)=\frac{1}{2}\int_{0^-}^{t}J(t-\tau)\frac{\partial}{\partial\tau}\left[f(t)-\sigma_r(r,t)-\frac{1}{2}pr^2\omega^2(\tau)\right]d\tau.$$

При известных f(t) и $\sigma_r(r, t)$ этот интеграл можно вычислить непосредственно, исключив предварительно разрыв при t=0. Функция ползучести J(r) может быть измерена как характеристика материала или определена численно по значению релаксационного модуля G(t), как это показано в работе [2].

ВЫВОДЫ

На основе теоретического анализа определены условия деформирования сырцового валика пильного джина.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Юнусов Р.Ф.* // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2009, №3. С.123…125.

2. *Каюмов С.С, Сафаров И.И.* Распространение и дефракция волн в диссипативно-неоднородных цилиндрических деформируемых механических системах. – Ташкент: Фан, 2002.

Рекомендована отделом джинирования, линтерования, волокноочистки, аэродинамики, обеспыливания и автоматизации. Поступила 10.02.09.