УДК 67:338

ОБ ИЗМЕНЕНИИ ЧИСЛЕННОСТИ ТЕХНИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ ПРИ НАЛИЧИИ КОНКУРЕНЦИИ

Б.С. МИХАЙЛОВ

(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)

Изменение численности (n) технических объектов (ТО) одного вида описывается уравнением [1, с.239]:

$$\frac{dn}{dt} = rn\left(1 - \frac{n}{N}\right), \qquad (1)$$

где r – удельная скорость роста численности ТО при отсутствии лимитирования; N – количество ТО, необходимое для удовлетворения потребности в ТО данного вида.

Решение этого дифференциального уравнения [1, с.239] дает закономерность изменения n(t) численности ТО в виде возрастающей S-кривой ($n = n_0$ при $t=0$; $n \to N$ при $t \to \infty$):

$$n = N \Big/ \left[1 + \left(\frac{N}{n_0} - 1\right)e^{-rt}\right]. \qquad (2)$$

Если различные виды ТО не взаимодействуют друг с другом и не конкурируют (например, швейные и прядильные машины), то соответствующие уравнения для численности этих видов ТО записываются как

$$dn_j / dt = r_j n_j (1 - n_j / N_j), \ j=1,2,\ldots \qquad (3)$$

Ситуация усложняется, если различные виды ТО конкурируют друг с другом (например, кольцевые и пневмомеханические прядильные машины).

Рассмотрим случай, когда имеются всего два вида конкурирующих ТО численностью соответственно n_1 и n_2 со скоростями роста r_1 и r_2 и скоростями замедления роста f_1 и f_2. Тогда можно записать два дифференциальных уравнения для изменения численности n_1 и n_2:

$$\frac{dn_1}{dt} = n_1(r_1 - f_1), \qquad \frac{dn_2}{dt} = n_2(r_2 - f_2). \qquad (4)$$

Если r_j и f_j – постоянные, то уравнения (4) описывают либо экспоненциально растущие, либо экспоненциально исчезающие виды(состояние $r_j = f_j$ неустойчиво по отношению к малым возмущениям r_j или f_j). Поэтому коэффициенты r или f должны зависеть от n. Удобно рассматривать величины f_1 и f_2 как линейные функции численности обоих видов, то есть

$$f_1 = \mu_{11}n_1 + \mu_{12}n_2, \qquad f_1 = \mu_{21}n_1 + \mu_{22}n_2, \qquad (5)$$

где μ_{ij} – постоянные коэффициенты.

Подставив (5) в (4), получаем искомую систему дифференциальных уравнений, описывающих изменение численности двух видов ТО при наличии конкуренции между ними:

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 n_1 - \mu_{11} n_1^2 - \mu_{12} n_1 n_2 ,$$
$$(6)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 n_2 - \mu_{22} n_2^2 - \mu_{21} n_1 n_2 .$$

Приняв в этих уравнениях $\mu_{11} = \frac{r_1}{N_1}$, $\mu_{22} = \frac{r_2}{N_2}$ (N_1, N_2 – потребность в ТО первого и второго вида), приведем уравнения (6) к виду:

$$\frac{dn_1}{dt} = r_1 n_1 (1 - \frac{n_1}{N_1}) - \mu_{12} n_1 n_2 ,$$
$$(7)$$
$$\frac{dn_2}{dt} = r_2 n_2 (1 - \frac{n_2}{N_2}) - \mu_{21} n_1 n_2 .$$

При $\mu_{12} = \mu_{21} = 0$ нет конкуренции, и из уравнений (7) получаем уравнение (3), когда n_1 достигает, как следует из формулы (2), величины N_1, а n_2 – величины N_2. При $\mu_{12} > 0$ и $\mu_{21} > 0$ с ростом n_1 уменьшается n_2 и наоборот; поэтому n_1 всегда меньше N_1, а n_2 – меньше N_2.

Модели (6) и (7), описывающие изменение численности двух конкурирующих видов ТО, пригодны и для описания изменения численности ТО (изделий) одного вида, выпускаемых двумя конкурирующими фирмами-производителями. (В этом случае в уравнениях (7) n_1 и n_2 – численность ТО каждой из фирм на определенный момент; N_1 и N_2 – максимально возможное число ТО, которое может быть выпущено каждой из фирм при отсутствии конкуренции; μ_{12}, μ_{21} – коэффициенты, характеризующие влияние фирм (их реакцию) друг на друга).

Действительно, если обе фирмы достаточно мощные, то общее число ТО, выпущенных этими фирмами, может превысить потребность N в этих ТО. Чтобы избежать перепроизводства ТО, фирмы уменьшают скорость выпуска ТО (определяемую по уравнениям (3), где j=1,2 – рассматриваемые нами фирмы) и тем больше, чем больше вероятность встречи на рынке ТО этих фирм – $\mu n_1 n_2$; в результате мы приходим к модели (6) или (7).

(Здесь важно отметить, что модель типа (6),(7), описывающая конкуренцию ТО разных видов или одного вида, но разных производителей, – не единственная).

Исследуем полученную систему дифференциальных уравнений (7).

Приравняем к нулю производные в системе (7). Тогда для стационарных решений $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$ получим систему алгебраических уравнений:

$$\bar{n}_1 \left[r_1 (1 - \frac{\bar{n}_1}{N_1}) - \mu_{12} \bar{n}_2 \right] = 0 ,$$
$$(8)$$
$$\bar{n}_2 \left[r_2 (1 - \frac{\bar{n}_2}{N_2}) - \mu_{21} \bar{n}_1 \right] = 0 .$$

Эта система имеет несколько решений:

$$1)\ \bar{n}_1 = \frac{N_1 (r_1 r_2 - r_2 \mu_{12} N_2)}{r_1 r_2 - \mu_{12} \mu_{21} N_1 N_2} ,$$
$$(9)$$
$$\bar{n}_2 = \frac{N_2 (r_1 r_2 - r_1 \mu_{21} N_1)}{r_1 r_2 - \mu_{12} \mu_{21} N_1 N_2} ,$$

при условии, что $r_1 r_2 \neq \mu_{12} \mu_{21} N_1 N_2$:

$$2)\ \bar{n}_1 = 0,\ \bar{n}_2 = N_2 , \qquad (10)$$
$$3)\ \bar{n}_2 = 0,\ \bar{n}_1 = N_1 , \qquad (11)$$
$$4)\ \bar{n}_1 = 0,\ \bar{n}_2 = 0 . \qquad (12)$$

Исследуем устойчивость первой точки равновесия, определяемой формулами (9). Для этого зададим небольшое отклонение от положения равновесия $n_1 = \bar{n}_1 + \xi$, $n_2 = \bar{n}_2 + \eta$ и подставим в уравнения (7). При этом правые части этих уравнений мы обозначим соответственно через $P(n_1, n_2)$ и $Q(n_1, n_2)$ и разложим в ряд Тейлора в окрестности точки $(\bar{n}_1, \bar{n}_2)$, ограничившись первыми членами разложения (в силу малости ξ и η).

Тогда имеем:

$$\frac{dn_1}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \xi a_{11} + \eta a_{12},$$
$$\frac{dn_2}{dt} = \frac{d\eta}{dt} = \xi a_{21} + \eta a_{22}, \tag{13}$$

где $a_{11} = \frac{\partial P}{\partial n_1}\Big|_{\bar n_1, \bar n_2} = r_1 - \frac{r_1}{N_1} 2\bar n_1 - \mu_{12}\bar n_2,$

$$a_{12} = \frac{\partial P}{\partial n_2}\Big|_{\bar n_1, \bar n_2} = -\mu_{12}\bar n_1, \tag{14}$$

$$a_{21} = \frac{\partial Q}{\partial n_1}\Big|_{\bar n_1, \bar n_2} = -\mu_{21}\bar n_2,$$

$$a_{22} = \frac{\partial Q}{\partial n_2}\Big|_{\bar n_1, \bar n_2} = r_2 - \frac{r_2}{N_2} 2\bar n_2 - \mu_{21}\bar n_1.$$

Подставив в выражения для a_{11} и a_{22} значения $\bar n_1$ и $\bar n_2$ формул (9), получаем окончательно для a_{11} и a_{22}:

$$a_{11} = -\frac{r_1}{N_1}\bar n_1, \quad a_{22} = -\frac{r_2}{N_2}\bar n_2. \tag{15}$$

Из теории линейных дифференциальных уравнений [2] известно, что общее решение системы (13) можно представить в виде:

$$\xi = C_{11}e^{\lambda_1 t} + C_{12}e^{\lambda_2 t},$$
$$\eta = C_{21}e^{\lambda_1 t} + C_{22}e^{\lambda_2 t}. \tag{16}$$

где амплитуды C_{ij} зависят от начальных условий; значения λ_1 и λ_2 определяют характер движения вблизи особой точки, или, как говорят, ее тип.

Характеристическое уравнение для системы (13) имеет вид [2]:

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda - a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22} = 0$$

и определяет два значения λ, при которых в системе возможны ненулевые решения:

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_{11} + a_{22}}{2}\right)^2 + a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}}. \tag{17}$$

Рассмотрим возможные значения λ_1 и λ_2.

Отметим прежде всего, что подкоренное выражение в (17) можно привести к виду:

$$\frac{1}{4}\left[\left(a_{11} - a_{22}\right)^2 + 4a_{12}a_{21}\right],$$

которое с учетом формул (14) для a_{12} и a_{21} всегда больше нуля. Тогда оба корня действительны.

Подставив в выражение (17) значения a_{11} и a_{22} из (15), a_{12} и a_{21} из (14), получим:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\left(\frac{r_1}{N_1}\bar n_1 + \frac{r_2}{N_2}\bar n_2\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{r_1}{N_1}\bar n_1 + \frac{r_2}{N_2}\bar n_2}{2}\right)^2 - \bar n_1 \bar n_2\left(\frac{r_1 r_2}{N_1 N_2} - \mu_{12}\mu_{21}\right)}. \tag{18}$$

Отсюда видно, что значение λ_2 (перед корнем в (18) стоит знак минус) всегда меньше нуля.

Значение λ_1 (перед корнем в (18) стоит знак плюс) не может быть равно нулю, поскольку $\frac{r_1 r_2}{N_1 N_2} \neq \mu_{12}\mu_{21}$, что указано в формуле (9).

Из (18) следует, что при $\frac{r_1 r_2}{N_1 N_2} \succ \mu_{12}\mu_{21}$ имеем $\lambda_1 < 0$, а при $\frac{r_1 r_2}{N_1 N_2} \prec \mu_{12}\mu_{21} - \lambda_1 < 0$.

Итак, при $\frac{r_1 r_2}{N_1 N_2} > \mu_{12}\mu_{21}$ имеем: $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$; следовательно [2], рассматриваемая особая точка ($\bar{n}_1, \bar{n}_2$), устойчива, так как решение (16) представляется в виде убывающих со временем экспонент.

Если $\frac{r_1 r_2}{N_1 N_2} \prec \mu_{12}\mu_{21}$, имеем: $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. В этом случае равновесие, определяемое формулами (9), является неустойчивым.

Аналогичные результаты получим, если будем исследовать не систему уравнений (7), а систему (6). В этом случае вместо формулы (9) имеем точку равновесия:

$$\bar{n}_1 = \frac{r_1\mu_{22} - r_2\mu_{12}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}}, \quad \bar{n}_2 = \frac{r_2\mu_{11} - r_1\mu_{21}}{\mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21}}, \qquad (9')$$

при условии, что $\mu_{11}\mu_{22} \neq \mu_{12}\mu_{21}$.

Равновесие в этой точке будет устойчиво при $\mu_{11}\mu_{22} > \mu_{12}\mu_{21}$, и будет неустойчиво при $\mu_{11}\mu_{22} < \mu_{12}\mu_{21}$.

В Ы В О Д Ы

1. Получена математическая модель в виде системы дифференциальных уравнений (6) или (7), описывающих изменение численности либо двух видов конкурирующих ТО, либо одного вида ТО, выпускаемых двумя конкурирующими фирмами-производителями.
2. Выявлены условия, при которых точка равновесия, определяемая формулой (9), является устойчивой или неустойчивой.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. *Михайлов Б.С.* Основные принципы и законы развития техники. – СПб., 2005.
2. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления (для втузов). – Ч.2. гл. XIII – М.: Наука, 1966.

Рекомендована кафедрой технологии прядения и нетканых материалов. Поступила 28.09.09.