

УДК 677.07:539.3/4

**УТОЧНЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ  
НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ НИТИ**

*В.П. ЩЕРБАКОВ, А.П. БОЛОТНЫЙ*

(Московский государственный текстильный университет им. А. Н. Косыгина,  
Костромской государственный технологический университет)

В расчетах прочности нити и пряжи встречаем два совершенно противоположных подхода. Первый предполагает при деформировании нити внешней силой  $P$  более нагруженными периферийные волокна, которые вследствие этого разрываются первыми и далее инициируют разрушение нити в целом. Другой подход к определению прочности нити приводит к иному результату: более натянутыми являются центральные волокна, с которых и начинается процесс разрушения нити. Чтобы выяснить причину расхождения самой концепции прочности нити, рассмотрим обе идеи, положенные в основу теорий прочности.

Идеализированная модель нити определена самой технологией нити, когда система параллельных волокон преобразуется в крученую структуру, в которой наружные волокна длиннее центральных.

На рис. 1 (геометрическая модель нити (а) и ее развертка (б) при одноосном растяжении) показано изменение при одноосном растяжении длины волокна  $l$ , расположенного на расстоянии радиуса  $r$  нити от ее оси и ориентированного под углом к оси нити  $\vartheta$ . При постоянном шаге витка  $h$  длина винтовой линии больше  $h$ , волокна должны удлиняться вследствие растяжения. Но все же геометрическая совместимость волокон в процессе кручения достигается в основном сменой положения частей волокон относительно оси нити таким образом, чтобы на большом протяжении нити длины траекторий волокон были бы одинаковыми. Этот эффект называют миграцией волокон. Экспериментальные наблюдения строения крученых нитей и пряжи обнаруживают не столь большую скорость миграции, чтобы отказаться от идеализированной структуры.

Следующим, определяющим модель структуры нити, фактором является вязкоупругая природа текстильных волокон и нитей, которая положена в основу современных теорий прочности не только текстильных, но и многих конструкционных материалов. Особенно нужно отметить, что явления, связанные с зависимостью напряжений и деформаций от времени, впервые были обнаружены и исследованы именно на текстильных материалах. Классический эксперимент по ползучести, в котором была установлена нелинейная упругость при малых деформациях шелко-

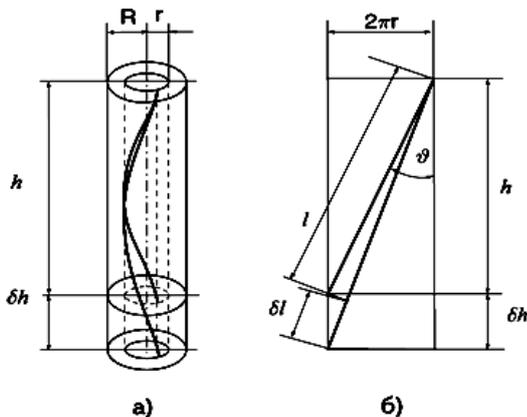


Рис. 1

вых нитей, был выполнен В. Вебером в Геттингене в 1835 г. Как уже отмечалось, в условиях непосредственного формирования нити и пряжи при кручении волокно располагается по винтовой линии, длина которой больше длины до кручения. Даже при наличии миграции волокно растягивается, в нем возникают дополнительные напряжения от кручения. И вот здесь расходятся позиции исследователей на дальнейшее описание состояния нити. Суммарные напряжения от внешней нагрузки складываются с напряжениями от кручения, и это напряженное состояние принимается за начальную нагрузку волокна. Эта точка зрения, игнорирующая вязкоупругие свойства волокон, принята во всей отечественной литературе. В действительности сразу же, и даже в процессе формирования нити и пряжи, начинает работать вязкоупругий механизм материала волокна. В волокнах происходит процесс релаксации напряжений, и по истечении довольно непродолжительного времени он в основном заканчивается. Дальнейшее падение напряжений с малой скоростью, близкой к нулю, продолжается на соответствующей паковке (бобине, початке). Но напряжения уменьшаются не до нуля. Волокно не вполне, но все же упруго. Потенциальная энергия деформирования волокон при кручении обуславливает взаимодействие волокон между собой, и в любом волокне даже при отсутствии внешней нагрузки имеются натяжение, перерезывающие силы, изгибающие и крутящие моменты, контактные силы [1]. Величины этих силовых характеристик вычислены для многих наиболее распространенных волокон. Численные значения натяжения волокон оказываются пренебрежимо малыми по сравнению с величинами натяжений, возникающих при нагружении нити, тем более в момент разрушения. Именно поэтому винтовая структура может быть принята в качестве расчетной, а многочисленные расчеты с использованием этой модели подтверждают ее достоверность.

Общая схема решения задач, связанных с нахождением перемещений и натяжений волокон при нагружении пряжи силой  $P$ ,

состоит в следующем: 1) составить уравнения совместности деформаций, то есть соотношения, связывающие деформации отдельных элементов; 2) заменить в уравнениях совместности деформации напряжениями или усилиями по закону Гука (или иному закону связи); 3) составить уравнения статики, считая геометрию системы определенной для недеформированного состояния; 4) решить полученную систему уравнений.

При простейшем теоретическом исследовании поведения волокон в нити с идеальной винтовой структурой учитываются только продольные растягивающие силы, и считается неизменным диаметр нити при растяжении. Пусть деформация нити  $\varepsilon_y = \frac{dh}{h}$ , где  $dh$  – удлинение шага  $h$  винтовой линии, по которой расположено волокно; деформация волокна  $\varepsilon_f = \frac{d\ell}{\ell}$  (здесь  $d\ell$  – удлинение волокна). В соответствии с указанной выше схемой расчета составляем уравнение совместности деформаций:

$$(\ell_f + \Delta\ell_f)^2 = (h + \Delta h)^2 + (2\pi r)^2. \quad (1)$$

Деформации волокна  $\varepsilon_f$  и нити  $\varepsilon_y$  связаны между собой соотношением:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_y \cos^2 \vartheta. \quad (2)$$

Шаг винтовой линии  $h$  не зависит от текущего радиуса нити  $r$ , а угол ориентации отдельного волокна  $\vartheta$ , равный углу подъема винтовой линии, изменяется вдоль радиуса нити от нуля в центре, достигая на поверхности нити радиуса  $R$  значения  $\beta$ . Ясно, что максимальная деформация волокна, равная деформации нити, возникает в центральных волокнах, минимальная – в наружных. Считая волокно вполне упругим, получаем напряжение в волокне:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_f, \quad (3)$$

где  $E_f$  – модуль упругости волокна. Отсюда следует, что более нагруженными являются центральные волокна, и здесь надо ожидать локального разрушения нити, которое затем инициирует разрушение нити в целом.

Другой результат получают, отклоняясь от классической схемы расчета статически неопределенных задач. Тогда в основу определения нагрузки на волокно положено разложение сил, вследствие которого имеем:

$$P_f = \frac{P_1}{\cos \vartheta}, \quad (4)$$

где  $P_f$  – натяжение волокна;  $P_1$  – продольная нагрузка, которую вычисляют делением нагрузки на нить на число волокон. Отсюда следует, что, во-первых, более нагруженными являются периферийные волокна и, во-вторых, чем больше крутка при данной нагрузке на нить, тем больше нагружены соответствующие волокна. Все поставлено "с ног на голову". Вместо того, чтобы рассчитать натяжение отдельного волокна, исходя из соотношения (3), и уравновесить все волокна осевой нагрузкой на нить, здесь проведено ничем физически не оправданное разложение (4).

Таким образом, винтовая структура нити приводит к возникновению максимальной нагрузки осевых волокон, которую можно рассматривать как нагрузку разрушения при деформации, равной предельной деформации волокна. Здесь надо принять во внимание некоторые весьма важные обстоятельства, связанные с расчетами прочности нити. В основе расчетов лежит физическая линейность: для волокон действует закон Гука. Но известно, что волокно извито, и, кроме того, реальная диаграмма его деформирования существенно нелинейна, даже если волокно распрямлено. Прежде всего заметим, что нас интересует предельная нагрузка нити, соответствующая ее разрушению, и безразлично, по какой траектории будет двигаться точка, соответствующая предельной деформации волокна. Если строить кривую деформации нити по свойствам волокон, то форма

диаграммы растяжения волокна, конечно, должна быть учтена при расчете напряжений. В этом случае производная  $\frac{\partial \varepsilon_f}{\partial \varepsilon_y}$  может содержать любую нелинейную зависимость  $\sigma_f = f(\varepsilon_f)$  для волокна. Кроме того, в области малых деформаций наблюдается тенденция центральных волокон к искривлению, которые не участвуют в восприятии растягивающей нагрузки до тех пор, пока не выпрямятся. Однако уже при незначительном растяжении нити она уплотняется с образованием структуры, очень близкой к идеализированной.

Проведем более полное исследование напряжений и деформаций волокон и нити, приближающее прочностные расчеты нити к действительному состоянию нити при ее нагружении [2].

$$\text{Введем параметры } u = \frac{\ell}{L}, \quad c = \cos \beta = \frac{h}{L},$$

где  $L$  – длина винтовой линии на поверхности нити, соответствующая радиусу  $R$ ;  $u$  – радиальное расположение волокна, изменяющееся от нуля в центре нити до единицы на ее поверхности. В дальнейшем нам необходимы соотношения:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{L^2 - h^2} = \frac{u^2 - c^2}{1 - c^2}, \quad \ell^2 = h^2 + 4\pi^2 r^2,$$

$$\cos \vartheta = \frac{h}{\ell} = \frac{c}{u}, \quad \sin \vartheta = \frac{2\pi r}{\ell} = \sqrt{1 - \frac{c^2}{u^2}}.$$

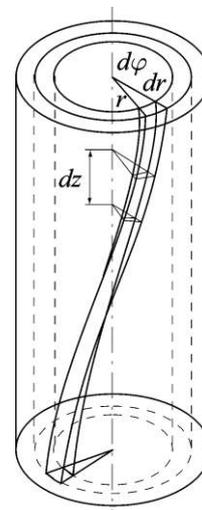


Рис. 2

Рассмотрим винтовой элемент волокна в нити (рис. 2), расположенный между двумя цилиндрами радиусов  $r$  и  $(r+dr)$  и между двумя винтовыми линиями, смещенными относительно друг друга на угол  $d\varphi$ . Элементарный объем ориентирован вдоль направления винтовой линии и определяется длиной отрезка  $dz$ , параллельного оси нити. Действующие на элемент силы направлены по нормали к каждой из шести граней объема (рис. 3 – равновесие элемента волокна), напряжение  $\sigma_f$  в волокне действует параллельно, напряжение  $g$  – перпендикулярно оси волокна. Принимаем  $(+\sigma_f)$  – растяжение и  $(+g)$  – сжатие.

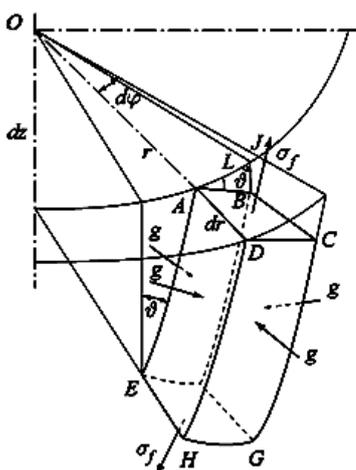


Рис. 3

Изменение диаметра нити может быть определено параметром, аналогичным коэффициенту Пуассона, характеризующему поперечное сжатие:

$$\nu_y = -\frac{dr/r}{dh/h}.$$

Определив деформацию нити как  $\varepsilon_y = \frac{dh}{h}$ , напомним формулу:

$$\varepsilon_f = \varepsilon_y \left[ \frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right], \quad (5)$$

связывающую деформацию волокна  $\varepsilon_f$  с деформацией нити  $\varepsilon_y$ .

В условиях растягивающего  $\sigma_f$  и сжимающего  $g$  напряжений деформация волокна, как это следует из курса сопротивления материалов:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_f}{E_f} - \frac{2\nu_f}{E_f}(-g), \quad (6)$$

где  $\nu_f$  – коэффициент Пуассона волокна.

Объединив оба выражения для деформаций волокна, получим

$$\varepsilon_y \left[ \frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] = \frac{1}{E_f} (\sigma_f + 2\nu_f g),$$

откуда

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_y \left[ \frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] - 2\nu_f g. \quad (7)$$

Произведение  $E_f \varepsilon_y$  равно напряжению  $\sigma_f$ , которое возникает в центральных волокнах ( $r=0$ ), где деформации волокна и нити одинаковы. Используя  $\sigma_{f0}$  в качестве нормализующего параметра, перейдем к безразмерным величинам  $\tilde{\sigma}_f = \frac{\sigma_f}{\sigma_{f0}}$ ,

$\tilde{g} = \frac{g}{\sigma_{f0}}$ . Здесь величины со знаком тильда наверху являются безразмерными. Тогда:

$$\tilde{\sigma}_f = \frac{c^2}{u^2} - \nu_y \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) - 2\nu_f \tilde{g}. \quad (8)$$

Из условий равновесия сил, действующих на шести координатных площадках (рис. 3), вычисляется относительное радиальное напряжение  $\tilde{g}$  в зависимости от радиального расстояния [2]:

$$\tilde{g} = \frac{1 + \nu_y}{1 + 2\nu_f} \frac{c^2}{u^2} \left( 1 - u^{1+2\nu_f} \right) - \nu_y \frac{1 - u^{2\nu_f-1}}{2\nu_f - 1}. \quad (9)$$

Напомним, что  $u$  – радиальное расположение волокна, изменяющееся от нуля в центре нити до единицы на ее поверхности. Из соотношения

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{\ell^2 - h^2}{L^2 - h^2} = \frac{u^2 - c^2}{1 - c^2}$$

находится значение  $u$ , и по формуле (9) определяется абсолютное радиальное напряжение  $g$ .

Относительное растягивающее напряжение получаем из формулы (8):

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_f = & \frac{(1 + \nu_y)c^2}{(1 + 2\nu_f)u^2} (1 + 2\nu_f u^{1+2\nu_f}) + \\ & + \nu_y \frac{1 - 2\nu_f u^{2\nu_f-1}}{2\nu_f - 1}. \end{aligned} \quad (10)$$

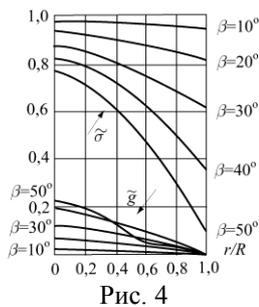


Рис. 4

Изменение напряжений  $\tilde{\sigma}$  и  $\tilde{g}$  в зависимости от радиального расстояния  $r/R$  для различных углов кручения  $\beta$  показано на рис. 4 [2].

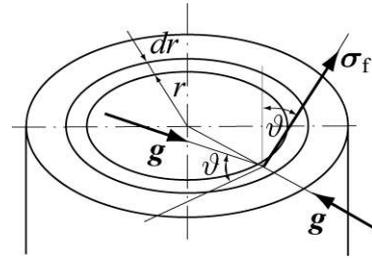


Рис. 5

Если рассматривать силы, действующие на малый элемент между двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами  $r$  и  $(r+dr)$  и приводящие к растяжению нити, как показано на рис. 5, то компоненты нормального напряжения  $\sigma_f$  и напряжения  $g$  в окружном направлении и перпендикулярного к грани  $ADHE$  (рис. 3) в проекциях на осевое направление нити дают соотношение:

$$\sigma_f (2\pi r dr \cos \vartheta) \cos \vartheta - g (2\pi r dr \sin \vartheta) \sin \vartheta = \frac{2\pi R^2}{1 - c^2} \left[ \sigma_f \frac{c^2}{u^2} - g \left( 1 - \frac{c^2}{u^2} \right) \right] u du.$$

Интегрированием этого равенства определяется суммарное растягивающее усилие. После нормирования и усреднения путем деления интеграла на площадь по-

перечного сечения нити  $\pi R^2$  получаем среднее безразмерное растягивающее напряжение в нити [2]:

$$\tilde{\sigma}_y = \frac{2c^2}{(1 + 2\nu_f)(1 - c^2)} \left\{ (1 + \nu_y) \left[ \ln c + \frac{2(1 + \nu_f)}{1 + 2\nu_f} \right] (1 - c^{2\nu_f+1}) - \frac{\nu_y}{2} \left[ \frac{3(1 + 2\nu_f)}{2\nu_f - 1} - \frac{4(1 + \nu_f)}{2\nu_f - 1} c^{2\nu_f-1} - \frac{1}{c^2} \right] \right\}. \quad (11)$$

Отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна равно отношению модуля упругости нити к модулю

упругости волокна и представляет собой функцию  $\tilde{\sigma}_y(\beta, \nu_f, \nu_y)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{y*}}{\sigma_{f*}} = \frac{E_y}{E_f} = & \frac{2 \cos^2 \beta}{(1 + 2\nu_f)(1 - \cos^2 \beta)} \times \\ & \times \left\{ (1 + \nu_y) \left[ \ln \cos \beta + \frac{2(1 + \nu_f)}{1 + 2\nu_f} (1 - (\cos \beta)^{2\nu_f+1}) \right] - \right. \\ & \left. - \frac{\nu_y}{2} \left[ \frac{3(1 + 2\nu_f)}{2\nu_f - 1} - \frac{4(1 + \nu_f)}{2\nu_f - 1} (\cos \beta)^{2\nu_f-1} - \frac{1}{\cos^2 \beta} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (12)$$

Если принять коэффициент Пуассона нити  $\nu_y = 0,5$  и равный ему коэффициент Пуассона волокна, то формула (12), определяющая прочность нити, преобразуется к виду [2]:

$$\frac{\sigma_{y*}}{\sigma_{f*}} = \frac{E_y}{E_f} = \frac{1}{4} + \frac{9}{4} \cos^2 \beta + \frac{3 \cos^2 \beta}{1 - \cos^2 \beta} \ln \cos \beta. \quad (13)$$

Для угла кручения  $\beta = 30^\circ$  вычисления по формуле (12) при  $\nu_y = 0,5$  и  $\nu_f = 0,25$  дают отношение предела прочности нити к пределу прочности волокна, равное 0,665; это отношение в случае  $\nu_y = \nu_f = 0,5$  составляет 0,643 (формула (13)). С увеличением крутки введенные формулами (12) и (13) отношение, определяющее прочность нити по прочности волокон, уменьшается: при  $\beta = 40^\circ$  оно составляет 0,435, при  $\beta = 50^\circ - 0,246$ .

Если не учитывать действие поперечных сил, то  $\frac{\sigma_{y*}}{\sigma_{f*}} = \cos^2 \beta$ . Тогда для  $\beta = 30^\circ$

вычисляемая величина – 0,75. Из приведенных вычислений и вывода формулы (12) следует, что учет поперечных сил, возникающих при кручении нити, приводит к уменьшению ее прочности. Однако известно, что кручение направлено преимущественно на увеличение прочности волокнистого продукта, включая ровницу. В чем же тогда состоит механизм явлений, обуславливающих увеличение прочности при кручении? Для этого надо сначала рассмотреть некрученный продукт, то есть пучок волокон. В этих условиях механизм разрушения нити представляет собой последовательный разрыв волокон, сначала наиболее слабых, а затем, после обрыва одного волокна, перераспределение нагрузки на остальные  $(m-1)$  волокон. Напряжение в волокнах увеличивается, и далее разрушение будет происходить по схеме пучка Даниэлса [1], [3]. Максимальная прочность пучка волокон  $P_{\max}$  всегда меньше средней прочности. В случае распределения Вейбулла с параметром  $\alpha$  ко-

эффициент  $k = \frac{(\alpha e)^{\frac{1}{\alpha}}}{\Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)}$  является коэффи-

циентом реализации средней прочности волокон в нити. Для хлопковых волокон  $k=0,57$ . В скрученном продукте распределение усилий между разорванным волокном и соседними, еще не разорванными, осуществляется в результате сил трения на участках скольжения волокон, начинающегося от их концов, которые не закреплены и натяжение которых должно равняться нулю. На некотором расстоянии  $\ell_s$  от места обрыва наличие обрыва практически не будет сказываться на распределении усилий, величина усилия в оборванном волокне будет почти такой же, что и в соседних необорванных волокнах. Оборванные места будут заблокированы. Само явление блокировки и величина скольжения  $\ell_s$  зависят от крутки. Для  $\ell \geq \ell_s$  система волокон является самоуплотняющейся, то есть чем сильнее натяжение, тем сильнее поперечное обжатие. Если же  $\ell < 2\ell_s$  то защемление волокон отсутствует и волокна скользят одно относительно другого. Длина  $2\ell_s$  принимается за длину пучка, к которому применима схема пучка Даниэлса. При этом увеличение средней прочности волокон вследствие масштабного эффекта, которые оборваны, но еще способны воспринимать и передавать нагрузку, не перекрывается коэффициентом реализации  $k$ . Расчет длины  $\ell_s$ , прочности волокон в зависимости от их длины можно найти во многих работах, в частности, в [1], [2].

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Щербаков В.П., Скуланова Н.С. Основы теории деформирования и прочности текстильных материалов: Монография. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2008.
2. Hearle J. W. S., Grosberg P., Backer S. Structural Mechanics of Fibers, Yarns and Fabrics. – New York, 1969.
3. Щербаков В. П. Прикладная механика нити. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, 2001.

Рекомендована кафедрой механической технологии волокнистых материалов МГТУ им. А.Н. Косыгина. Поступила 29.09.09.