УДК 677.024.1:51

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ОРНАМЕНТАЛЬНЫХ КОМПОЗИЦИЙ С ПОВТОРЯЮЩИМСЯ РАППОРТОМ

А.В. ФИРСОВ, Л.Б. КАРШАКОВА

(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)
E-mail: office@msta.ac.ru

Приведен математический анализ одно- и многомотивных раппортных сеток, в результате чего появляется возможность использования информационных средств для синтеза и анализа орнаментов.

The mathematical analysis of one- and polymotivation pattern grids, that enables to use information means for synthesis and analysis of ornaments, is offered.

Ключевые слова: орнамент, раппортная композиция, точка фиксации мотива, координатная сетка, базовая система координат, оси повторов, векторы повторов, рассадка.

Орнамент имеет структурную основу, что дает возможность исследовать графические схемы узора [1]. В настоящей работе рассматривается математическое описание орнаментальных композиций с бесконечно повторяющимся раппортом.

В одной раппортной композиции может быть один или несколько одинаковых или разных мотивов [2]. Мотив, с математической точки зрения, – это множество цветных точек. Возьмем в качестве точки фиксации мотива его геометрический центр. Пронумеруем мотивы от 1 до n. Обозначим точку фиксации мотива i как o_i. При привязке мотива к сетке рисунок подвергается ортогональным преобразованиям. Для их описания необходимо каждому мотиву сопоставить координатную сетку $x_io_iy_i$. Назовем эту систему координат связанной. Мотив можно описать как функцию C(x, y), определяющую цвет точки в зависимости от местоположения в связанной системе координат.

Для описания рассадок мотива по сетке необходимо ввести систему координат XOY, связанную с тканью. Пусть ось OX задает направление основы, а ось OY – направление утка. Назовем эту систему базовой.

Начнем с простейшего случая: один мотив повторяется один раз. Задача заключается в том, чтобы выразить функцию C(x, y) через координаты, связанные с тканью, то есть найти C(X,Y). При определении места мотива на ткани задается точка фиксации o(X,Y) и угол поворота ϕ связанной системы координат xoy относительно основной XOY. Пусть координаты точки o в XOY будут X_0 и Y_0. Тогда координаты каждой точки мотива в базовой системе находятся по следующим формулам [3]:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим рассадку одного мотива, повторяющегося с одинаковой периодичностью по вертикали и горизонтали (рис. 1).

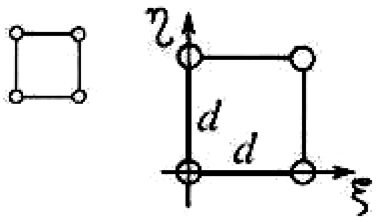

Рис. 1

Введем ось ξ, которая описывает расположение мотивов по горизонтали. На этой оси рисунки повторяются с периодичностью d. Введем вторую ось η, вдоль которой будет задаваться шаг повторения первой оси. В данном случае он также будет равен d. Назовем такие оси осями повторов.

Привяжем оси к системе координат XOY. Пусть ось ξ совпадает с осью OX, а η – с OY. Такая раппортная композиция может быть описана функцией C(X,Y), периодом d, парой осей повторов ξ, η.

Класс расположения мотивов, которые можно описать, используя две оси повторов, назовем регулярными рассадками (рис. 2).

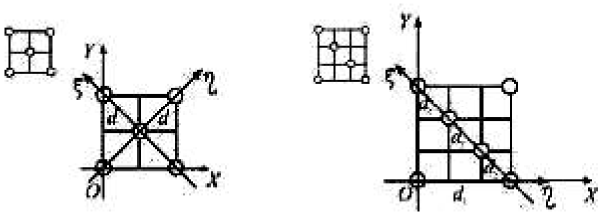

Рис. 2

Для того, чтобы задать направление осей повторов, необходимо задать векторы $\vec{\eta}$, $\vec{\xi}$ по направлению совпадающие с соответствующей осью, длиной равные периоду. Будем их называть векторами повторов.

Определим координаты векторов повторов в базовой системе координат. За единицу возьмем наибольший общий делитель приращения координат вдоль осей X и Y . Тогда на рис. 2 в первом примере $\vec{\eta}$ = {1,1}, $\vec{\xi}$ = {-1,1}, а во втором $\vec{\eta}$ = = {3,0}, $\vec{\xi}$ = {-1,1}. Во втором примере значение интервалов между центрами фиксации мотивов d_1=3, $d_2=\sqrt{2}$, но эта информация уже учтена в соответствующих векторах. Таким образом, векторы повторов задают не только направление оси, но и показывают период. Таким образом, статическая регулярная рассадка одного мотива определяется функцией C(X,Y) и векторами повторов $\vec{\eta}$, $\vec{\xi}$.

В некоторых случаях двух осей недостаточно для того, чтобы математически описать раппортную сетку. Договоримся, что если для описания требуются две пары осей периодичности, то такие рассадки будут называться дважды регулярными. На рис. 3 приведен пример такого раппорта.

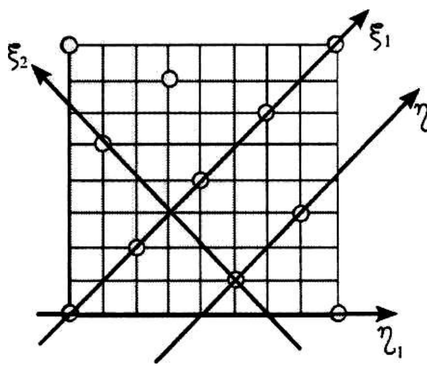

Рис. 3

Для описания такого рода сеток необходимо также знать смещение пар осей относительно друг друга. Введем вектор смещения $\overrightarrow{\delta_{12}}$. Это может быть любой вектор между двумя центрами фиксации мотивов, принадлежащих разным группам регулярности. Таким образом, статическая дважды регулярная рассадка одного мотива определяется функцией C, векторами $\vec{\eta}_1$, $\vec{\xi}_1$, $\vec{\eta}_2$, $\vec{\xi}_2$, и вектором смещения одной регулярной сетки относительно другой $\overrightarrow{\delta_{12}}$.

Максимальное количество регулярных сеток равно количеству мотивов. Тогда каждый элемент можно описать как статическую рассадку одного мотива (рис. 1). В качестве периода необходимо брать ширину раппорта. Будем называть такую рассадку нерегулярной.

В случае динамической рассадки рисунок может быть повернут на произвольный угол ϕ_i, где i – номер мотива от 1 до n включительно. При построении этой модели надо рассматривать еще и повороты ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_n$ осей координат, связанных с каждым рисунком.

Перейдем к рассадке нескольких мотивов по раппортной сетке. Начнем сразу с наиболее общего случая – с нерегулярной динамической рассадки. Кроме параметров, участвующих в формировании орнаментальной композиции на основе одного мотива, следует учитывать последовательность расположения мотивов. Будем считать, что существует база из m различных мотивов: $\{C_1,\ldots,C_m\}$. Из нее на любом месте может оказаться любой мотив: C_{ij}, где i_j – от 1 до m включительно. Тогда нерегулярная динамическая рассадка на несколько мотивов описывается следующими параметрами: последовательностью расположения рисунков на оси периодичности C_{i_1}, $C_{i_2}, \ldots, C_{i_n}$ где i_j от 1 до m; последовательностью углов поворота мотива ϕ_1, $\phi_2, \ldots, \phi_n$; векторами повторов $\vec{\eta}_1$, $\vec{\xi}_1$, $\vec{\eta}_2$, $\vec{\xi}_2, \ldots \vec{\eta}_n$, $\vec{\xi}_n$ и векторами смещения регулярных сеток относительно друг друга $\overrightarrow{\delta_{12}}$, $\overrightarrow{\delta_{13}}, \ldots, \overrightarrow{\delta_{1n}}$. Если раппортная композиция является регулярной или можно выявить несколько групп в данном раппорте, то приведенная выше схема упрощается. При работе со статической рассадкой просто не надо учитывать углы поворотов.

Художники-орнаменталисты кроме квадратных раппортов используют также сетки, в основании которых лежит прямоугольник, ромб или параллелограмм [1]. Такие схемы описываются аналогично.

ВЫВОДЫ

1. Рассмотрены с математической точки зрения одно- и многомотивные раппортные сетки. Перечислены наборы параметров для описания статических и динамических схем орнаментальных композиций.

2. Данный подход позволяет осуществить переход от эстетико-смысловой (художественной) информации к абстрактной. Это дает возможность применения компьютерных технологий для синтеза новых орнаментов и анализа семейств орнаментов с одинаковыми параметрами для выявления закономерностей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Береснева В.Я., Романова Н.В.* Вопросы орнаментации ткани. – М.: Легкая индустрия, 1977.

2. *Бесчастнов Н.П.* Графика текстильного орнамента. – М.: МГТУ им. А.Н. Косыгина, Совъяж Бево, 2004.

3. *Александров П.С.* Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Наука, 1979.

Рекомендована кафедрой информационных технологий и компьютерного дизайна. Поступила 04.02.10.