

УДК 621.01

**ИССЛЕДОВАНИЕ ТРАЕКТОРИИ ДВИЖЕНИЯ ЦЕНТРА МАСС НИТИ, РАСПОЛАГАЮЩЕЙСЯ ПО СПИРАЛИ АРХИМЕДА**

*А.А.КРАСНОВ*

(Ивановский государственный архитектурно-строительный университет)

E-mail: kaa1954@yandex.ru

*В работе исследуются свойства траектории центра масс нити, витки которой располагаются по спирали Архимеда.*

*The properties of the trajectory of the thread mass centre, the branches of which settle down on the Archimedes's spiral, are probed in the article.*

**Ключевые слова:** траектория движения центра масс нити, спираль Архимеда, витки нити, шаг спирали, численные методы, окружность с постоянным радиусом.

Рассмотрим задачу о движении центра масс гибкой нерастяжимой нити, витки которой укладываются по спирали Архимеда.

Ранее [1] были получены уравнения и траектории движения центра масс нити, наматываемой на цилиндр. При этом предполагалось, что витки нити располагаются по окружностям. В результате было показано, что траектории движения центра масс нити в первом приближении описываются уравнениями окружностей, радиусы которых стремятся к нулю.

Рассмотрим траекторию движения центра масс гибкой нити, поперечные размеры которой отличны от нуля и витки которой располагаются по спирали Архимеда. Она описывается известным уравнением [2]:

$$\rho = k \varphi, \quad (1)$$

где  $k = \alpha/2 \pi$  – параметр спирали Архимеда;  $\alpha$  – шаг спирали, в данный момент равный толщине нити.

Выражая координаты центров масс элементарных отрезков нити и их длины через радиус  $\rho_i$  и угол  $\psi_i$ , получаем:

$$x_{ci} = k\psi_i \cos \psi_i, \quad y_{ci} = k\psi_i \sin \psi_i,$$

$$\Delta \ell_i = \sqrt{\frac{\Delta \rho^2}{\Delta \psi_i^2} + \rho^2} \Delta \psi_i, \quad (2)$$

$$L = \int_0^{\varphi} \sqrt{\left(\frac{d\rho}{d\psi}\right)^2 + \rho^2} d\psi,$$

где  $L$  – длина нити;  $\Delta \ell_i$  – длина элементарного отрезка нити.

Используя (1), (2) и известное выражение для центра масс протяженного тела [3] и переходя от интегральных сумм к определенным интегралам, получаем в конечном итоге следующие выражения для координат центра масс нити:

$$x_c = \frac{2k \int_0^\varphi \psi \sqrt{1+\psi^2} \cos \psi d\psi}{\varphi \sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})}, \quad (3)$$

$$y_c = \frac{2k \int_0^\varphi \psi \sqrt{1+\psi^2} \sin \psi d\psi}{\varphi \sqrt{1+\varphi^2} + \ln(\varphi + \sqrt{1+\varphi^2})}.$$

Интегралы, стоящие в числителях выражений (3), не берутся в квадратурах. Поэтому для получения зависимостей координат центра масс нити от угла поворота  $\varphi$  используем численные методы, варьируя величину угла поворота в пределах от 0 до  $\pi$  радиан. Результаты в графическом виде представлены на рис. 1, на котором показана траектория движения центра масс нити в зависимости от угла поворота  $\varphi$ .

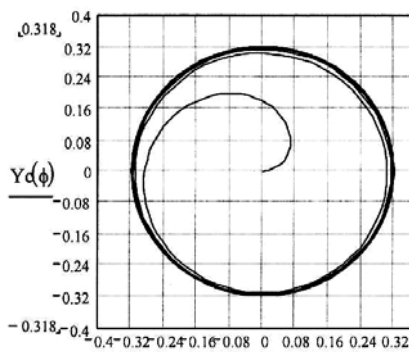


Рис. 1

Анализ рис. 1 показывает, что радиус кривизны траектории движения центра масс нити стремится к некоторой постоянной величине. Поэтому при достижении углом  $\varphi$  некоторого значения радиус кривизны траектории движения центра масс нити остается далее постоянным, и он (центр масс нити) движется по окружности. Назовем эту окружность предельной, а радиус этой окружности предельным радиусом кривизны траектории движения центра масс нити.

Изучим влияние шага спирали Архимеда на радиус предельной окружности. Для этого, варьируя значения шага от 1 до 8, получим графики зависимостей модуля

радиус-вектора центра масс нити от угла поворота  $\varphi$  (рис. 2).

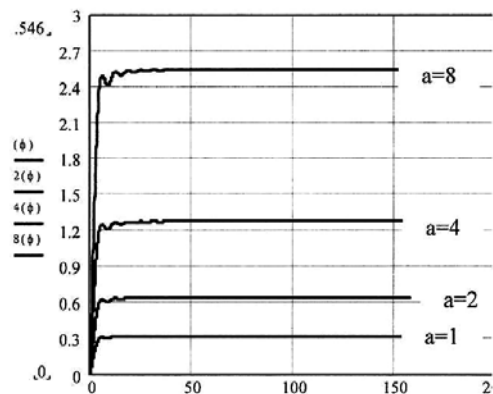


Рис. 2

Анализ полученных зависимостей показывает, что радиус предельной окружности прямо пропорционален шагу спирали и может быть описан уравнением:

$$R_{пр} = 0,318 a. \quad (4)$$

Коэффициент пропорциональности уравнения (4) найден методом наименьших квадратов.

Рассматривая теперь траекторию движения центра масс нити, которая в полярной системе координат описывается функцией вида:

$$\rho = \rho_0 + k\varphi, \quad (5)$$

получаем уравнение траектории движения центра масс нити:

$$x_c = \frac{\int_0^\varphi (\rho_0 + k\psi) \sqrt{k^2 + (\rho_0 + k\psi)^2} \cos \psi d\psi}{\int_0^\varphi \sqrt{k^2 + (\rho_0 + k\psi)^2} d\psi}, \quad (6)$$

$$y_c = \frac{\int_0^\varphi (\rho_0 + k\psi) \sqrt{k^2 + (\rho_0 + k\psi)^2} \sin \psi d\psi}{\int_0^\varphi \sqrt{k^2 + (\rho_0 + k\psi)^2} d\psi}.$$

Как и в предыдущем случае, производя расчеты численными методами, находим зависимости координат центра масс от уг-

ла поворота  $\varphi$  и вид траектории его движения (рис. 3).

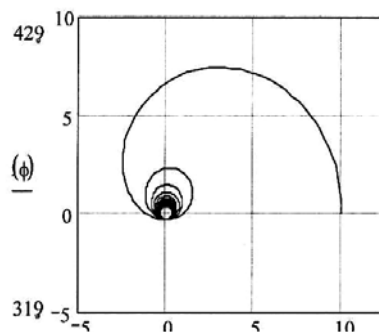


Рис. 3

На рис. 3 представлена траектория движения центра масс нити, а на рис.4 – увеличенное изображение траектории движения центра масс нити в окрестности нуля.

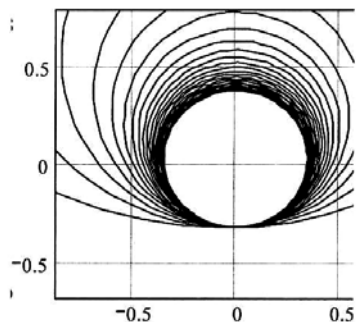


Рис. 4

Анализ полученных зависимостей показывает, что, как и при начальном радиусе спирали Архимеда, равном нулю, траектория движения центра масс наматываемой нити стремится к предельной окружности, радиус которой описывается формулой (4).

## ВЫВОДЫ

Показано, что траектория движения центра масс нити, витки которой располагаются по спирали Архимеда, стремится к окружности с постоянным радиусом – предельной окружности. Показано, что радиус предельной окружности пропорционален шагу спирали Архимеда. Найден коэффициент пропорциональности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бессонов А.П. Основы динамики механизмов с переменной массой звеньев. – М.: Наука, 1967.
2. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. – М.: Физматгиз, 1963.
3. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. – М.: Высшая школа, 1986.

Рекомендована кафедрой строительной механики. Поступила 05.06.10.