УДК 687.05/ 539.384/ 685.31

# МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗГИБА МАЛОРАСТЯЖИМОГО ЛИСТА

*А.Г. УСОВ*

**(Санкт-Петербургский государственный университет технологии и дизайна)**
E-mail: rector@sutd.ru

***Исследуется изгиб листа текстильного полотна при таких условиях, когда оно может считаться упругой оболочкой, срединная поверхность которой практически не растяжима. Предлагается алгоритм построения многогранной поверхности, удобный для компьютерного моделирования чистого изгиба полотен.***

***The sheet bend of a textile canvas under such circumstances when it can be considered as the elastic coating, which median surface is practically non-stretchable is researched herein. The algorithm of construction of the many-sided surface, convenient for computer modelling of the canvases pure bend is offered in the article.***

**Ключевые слова: изгиб листа текстильного полотна, развертывающаяся поверхность, модель в виде многогранной поверхности, алгоритм построения, изгиб текстильных полосок.**

По мере развития компьютерных технологий они стали активно применяться для исследования и проектирования формы текстильной оболочки [1], [2]. Построение модели оболочки производится чаще всего путем интегрирования системы дифференциальных уравнений движения массивных частиц ткани [3]. Применяется также метод минимизации потенциальной энергии деформированного текстильного материала [4].

В настоящей работе предлагается эффективная методика исследования изгиба текстильных полотен в зависимости от типа заделки листа полотна в предположении, что растяжением и сдвигом срединной поверхности листа как упругой оболочки можно пренебречь по сравнению с ее изгибными деформациями. Определение формы изгиба сводится к перемножению матриц и дает достоверную информацию о форме текстильной оболочки как механической системы при относительно малом числе ее обобщенных координат.

Пусть недеформированный лист полотна имеет вид прямоугольника R размерами $\ell_x \times \ell_y$ (рис. 1) и заполнен упругой средой. Назначаем лицевую сторону срединной плоскости недеформированного листа и связываем с ней систему координат $Oxyz$, развернутую относительно абсолютной системы $OXYZ$, связанной со стойкой.

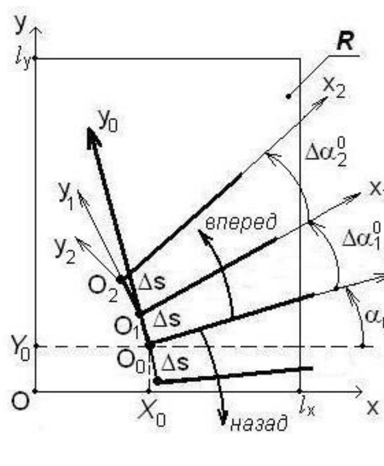


Рис. 1

Пренебрежем растяжениями и сдвигом срединной поверхности полотна при его деформации, так что гауссова кривизна срединной поверхности деформированного листа остается равной нулю. Такая поверхность, называемая развертывающейся

[5], получается из плоской развертки путем изгиба. Развертывающаяся поверхность может быть плоской, цилиндрической, конической или поверхностью касательных. Пусть область $\breve{R}$ – образ прямоугольника $R$ на изогнутой поверхности – не включает в себя зону перелома, то есть окрестность вершины конуса, где кривизна направляющих и соответственно изгибающий момент весьма велики. Образующие и направляющие развертывающейся поверхности создают ортогональную координатную сетку на изогнутой поверхности (рис. 2) и на развертке.

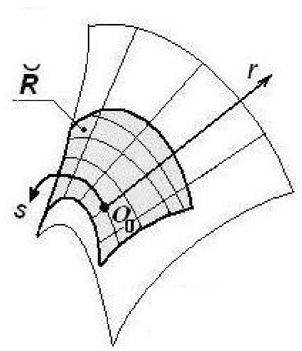


Рис. 2

Срединную поверхность изогнутого листа будем моделировать в виде многогранной поверхности, создаваемой по следующему алгоритму.

1. Тремя углами $\alpha, \beta, \gamma$ задаем положение трехгранника $Oxyz$ в системе координат $OXYZ$. Тремя параметрами $X_0$, $Y_0$, $\alpha_0$ задаем положение базовой (начальной) образующей $O_0x_0$ на развертке.

2. Задавшись числом граней $N$ и начальными значениями углов между образующими $\Delta\alpha_n^0$, $n = 0,1,\ldots,N$, строим план изгиба на развертке. Рассчитываем шаг $\Delta s$ вдоль базовой направляющей, достаточный для покрытия области $R$. Делаем шаг $\Delta s$ по оси $O_0y_0$ вдоль касательной к направляющей, поворачиваем образующую $O_0x_0$ на угол $\Delta\alpha_1^0$ и строим следующую образующую $O_1x_1$. Сделав далее шаг в направлении оси $O_1y_1$, строим образующую $O_2y_2$ и т. д. Гранями моделируемой поверхности служат многоугольники, ограниченные образующими и краями развертки.

3. Задавшись начальными значениями углов $\Delta\beta_n^0$ между нормалями к граням, поворачиваем последовательно грани друг относительно друга, оставляя первую (базовую) грань в плоскости $xOy$, и строим многогранную поверхность.

4. Оптимизируем начальную модель путем поиска значений $\Delta\alpha_n$, $\Delta\beta_n$, доставляющих минимум целевой функции – потенциальной энергии листа изогнутого полотна, сложенной с величинами, представляющими собой "штраф" за нарушение дополнительных условий изгиба. Срединная поверхность полотна будет огибающей по отношению к построенной многогранной поверхности.

В наиболее общем случае имеем поверхность, образованную касательными к ее горловой линии. Отношения значений $\Delta\alpha_n$, $\Delta\beta_n$ к длине дуги $\Delta u$ горловой линии представляют средние значения ее кривизны и кручения.

План изгиба в зависимости от способа заделки (захвата) полотна может быть построен как для полуплоскости $y_0 > 0$ (направление "вперед" на рис. 1), так и для направления "назад" по оборотной стороне плоскости развертки.

Пусть $\hat{A}_n = \begin{pmatrix} \cos\Delta\alpha_n & \sin\Delta\alpha_n \\ -\sin\Delta\alpha_n & \cos\Delta\alpha_n \end{pmatrix}$,

$\hat{S}_0 = \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{pmatrix}$, $\hat{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s \end{pmatrix}$. Вектор $V_{n-1}$ координат точки, принадлежащей $n-1$ грани, преобразуется в вектор $V_n$ координат этой точки в системе координат $O_nx_ny_n$ по формуле:

$$V_n = \hat{A}_n (V_{n-1} - \hat{S}). \quad (1)$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$V_{n-1} = \hat{A}_n^{-1} V_n + \hat{S}.$$

Вектор $V_{n-1}$ преобразуется в вектор $V$ координат рассматриваемой точки в системе $Oxy$ по формуле:

$$V = \widehat{P}_{n-1} V_{n-1} + \widehat{C}_{n-1}, \qquad (2)$$

где $\widehat{P}_{n-1} = \prod\limits_{k=0}^{n-1} \widehat{A}_k^{-1}$, $\widehat{C}_{n-1} = \left( \sum\limits_{k=1}^{n-2} \widehat{P}_k + \widehat{A}_0^{-1} \right) \widehat{S} + \widehat{S}_0$.

С использованием формулы (2) определяем точки пересечения образующих с границами развертки. Применяя формулу (1), рассчитываем локальные координаты вершин развертки и определяем их принадлежность $n$-й грани. Строим многоугольник грани и рассчитываем его геометрические и механические параметры.

Многогранную поверхность строим с использованием трехмерных матриц. Пусть $X_{n-1}$ – вектор координат некоторой точки трехгранника $O_{n-1}x_{n-1}y_{n-1}z_{n-1}$ в связанной с ним системе координат. Обозначив

$$S = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta s \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Delta\beta_n & \sin\Delta\beta_n \\ 0 & -\sin\Delta\beta_n & \cos\Delta\beta_n \end{pmatrix},$$

$$A_n = \begin{pmatrix} \cos\Delta\alpha_n & \sin\Delta\alpha_n & 0 \\ -\sin\Delta\alpha_n & \cos\Delta\alpha_n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

находим вектор координат этой точки в системе $O_n x_n y_n z_n$:

$$X_n = B_n A_n \left( X_{n-1} - S \right).$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$X_{n-1} = T_n X_n + S,$$

где $T_n = A_n^{-1} B_n^{-1}$.

Вектор $X_{n-1}$ преобразуется в вектор координат точки относительно системы $O_0x_0y_0z_0$, связанной с базовой гранью, по формуле:

$$X_0 = P_{n-1} X_{n-1} + C_{n-1}, \qquad (3)$$

где $P_{n-1} = \prod\limits_{k=1}^{n-1} T_k$, $C_{n-1} = \left( Q_{n-2} + E \right) S$, $Q_{n-2} = \sum\limits_{k=1}^{n-2} P_k$, $E$ – единичная матрица 3×3. На основе формулы (3) строятся вершины граней в пространстве, и компонуется трехмерная модель изогнутой поверхности.

Полезность предлагаемого способа моделирования поверхности полотна проявляется при обработке эксперимента, посвященного определению изгибной жесткости текстильного материала. Этот же эксперимент подтверждает и применимость способа. Рассмотрим результат обработки эксперимента по цилиндрическому изгибу полоски шинельного полугрубого драпа поверхностной плотности ρ = 790 г/м$^2$. Полоска длиной ℓ = 10 см зажата горизонтальным клещевым захватом и свободно свешивается вдоль направляющей, составляющей угол 45$^o$ с нитями основы.

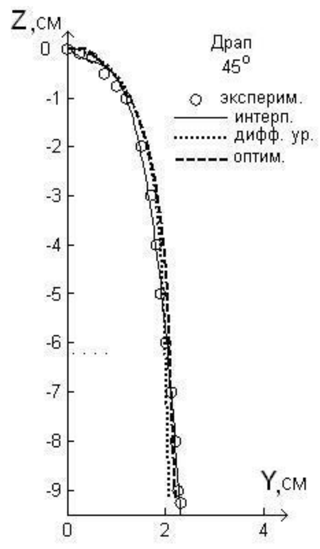


Рис. 3

На рис. 3 изображен профиль полоски. Точки замера отмечены кружками. Сплошная линия есть результат интерполирования опытных данных полиномом третьей степени. Пунктиром отмечен профиль полоски, полученный в результате оптимизационной процедуры. Жесткость на изгиб D включена в число варьируемых параметров. Штрафная составляющая целевой функции учитывает отклонение расчетной кривой от экспериментальной. Расчетное значение D =0,12 Н·см. Точечная линия есть результат расчета профиля апробированным способом: путем решения дифференциального уравнения изгиба упругой полоски [6]:

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = -\frac{\rho g}{D}(\ell - s)\sin\beta$$

с граничными условиями $\beta(0) = \beta_0$, $\beta'(\ell) = 0$ ($\beta$ – угол, который составляет касательная к профильной линии с осью $OZ$). Практическое совпадение результатов теоретических расчетов позволяет сделать вывод, что предлагаемый способ вполне применим для моделирования изгиба текстильного полотна. Процесс оптимизационного расчета более устойчив и требует меньше времени, чем решение краевой задачи.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Terzopoulos D., Barr A.* Elastically deformablemodels// Computer Graphics (Proc. SIGGRAPH). – V. 21, № 4, 1987. P. 205…214.

2. *Baraff D. and Witkin A.* Large steps in cloth simulation// Proc. SIGGRAPH-98. – 1998. P. 43…54.

3. *Ландовский В. В., Фроловский В. Д.* Исследование методов интегрирования дифференциальных уравнений в задаче моделирования поведения ткани на основе метода частиц// Сиб. журн. вычисл. математики/ РАН. Сиб. отд-ние. – Новосибирск, 2006. — Т. 9, № 3. - С. 287-298.

4. *Фроловский В. Д.* Метод энергетических функций построения квазиразверток поверхностей// Сиб. журн. индустриальной математики. – Новосибирск, 2000, № 1(5), т. 3. С. 195…204.

5. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии. Изд. 4-е. – М.: Едиториал УРСС, 2003.

6. *Попов Е. П.* Теория и расчет гибких упругих стержней.– М.: Наука, 1986.

Рекомендована кафедрой теоретической и прикладной механики. Поступила 05.06.10.