УДК 677.022.3/.5

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ВОЛОКНИСТОГО ПРОДУКТА С УПЛОТНИТЕЛЕМ В ФОРМЕ ТОРА*

ANALYTIAL RESEARCH OF A FIBROUS PRODUCT INTERACTION WITH A TORE SHAPED COMPACTOR

Р.М. БОРИСОВ, О.М. ОВИКЯН, А.В. ШАГИНОВ, С.В. ЧИРКОВ, В.И. РОНЬЖИН
R.M. BORISOV, O.M. OVIKJAN, A.V. SHAGINOV, S.V. CHIRKOV, V.I. RONZHIN

(Ивановская государственная текстильная академия)
(Ivanovo State Textile Academy)
E-mail: ttp@igta.ru

Рассмотрен механизм силового взаимодействия уплотнителя в форме тора с волокнистым продуктом.

____

*Работа выполнена под руководством Заслуженного деятеля науки РФ, проф., докт. техн. наук Г.И. Чистобородова. Работа выполнена в рамках инициативного исследовательского проекта, поддержанного региональным конкурсом РФФИ на 2009-2010 гг. (проект 09-08-97566-р_центр_а).

The mechanism of force interaction of a tore shaped compactor with a fibrous product is considered.

Ключевые слова: волокнистый продукт, уплотнитель в форме поверхности тора, сила сжатия, поверхность вращения.

Keywords: a fibrous product, a tore shaped compactor, force of shrinkage, a rotation surface.

Тором называется тело, получающееся при вращении круга радиусом α вокруг оси, лежащей в его плоскости на расстоянии b от центра ($b > \alpha$).

Рассмотрим механизм силового взаимодействия уплотнителя и волокнистого продукта. Систему координат xoy поместим так, как показано на рис. 1.

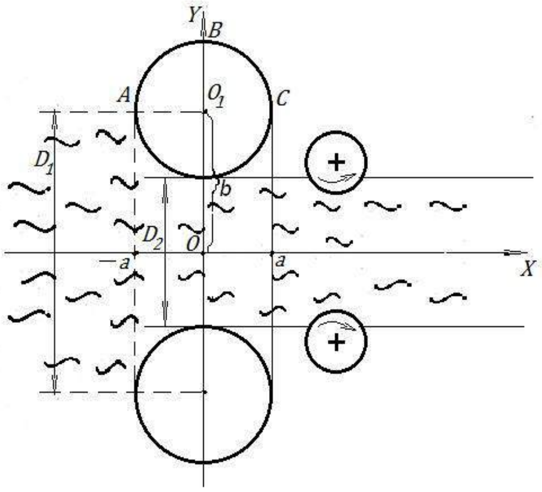

Рис. 1

Уравнение окружности ABCD будет иметь вид:

$$x^2 + (y - b)^2 = a^2. \qquad (1)$$

Центр-точка (0, b); радиус $R = a$. Круг $ABCDO_1$ вращается относительно оси OX. Из (1) находим:

$$y = b \pm \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (2)$$

При этом уравнение кривой ABC будет:

$$y = b + \sqrt{a^2 - x^2},$$

а кривой ADC:

$$y = b - \sqrt{a^2 - x^2}. \qquad (3)$$

Нас интересует поверхность, получающаяся при вращении кривой ADC относительно оси OX. Диаметр сечения поверхности плоскостью, перпендикулярной оси OX, будет:

$$D(x) = 2y(x), \qquad (4)$$

$$D(x) = 2\left(b - \sqrt{a^2 - x^2}\right). \qquad (5)$$

Здесь и в дальнейшем следуем обозначениям [1]. Лента с первоначальным диаметром D_1 входит в уплотнитель в форме поверхности тора, где сжимается до диаметра D_2. Происходит деформация и уплотнение ленты.

В [1] получены формулы для вычисления силы сжатия ленты при протаскивании ее через уплотнитель в форме поверхности вращения:

$$N = \frac{\alpha}{\pi^2}\left(\frac{4g}{\gamma}\right)^3 (I_2 - I_1), \qquad (6)$$

где

$$I_1 = \frac{1}{8}\left[\left(D_2^{-4} - D_1^{-4}\right) - 2K\left(D_1^2 - D_2^2\right)\right],$$

$$I_2 = \frac{1}{\mu_y}\int_{x_1}^{x_2}\left[D^{-5}(x) - KD(x)\right]dx, \qquad (7)$$

$$K = \xi_0^3\left(\frac{\pi\gamma}{4g}\right)^3.$$

Здесь: α – коэффициент, характеризующий физические свойства ленты и уплотнителя (постоянен); g – развес ленты; γ – удельный вес волокна; ξ_0 – удельное заполнение уплотнителя лентой, при котором отсутствует сопротивление протаскиванию; $\mu_у$ – коэффициент трения между лентой и уплотнителем; D_1 – диаметр ленты; D_2 – диаметр уплотнителя на выходе.

Размерности и численные значения исходных параметров:

$[g]$ = г/см; $[\gamma]$ = г/см^3;
хлопок: $\gamma = 1{,}52$ г/см^3;
$[\xi_0] = 1$; $\xi_0^3 = 0{,}00054$;
$\mu_у = 0{,}3$; $[\mu_у] = 1$;
$[D_1] = [D_2]$ = см;
$[K]$ = см$^{-6}$;
$[I_1] = [I_2]$ = см$^{-4}$;

$$\left[\left(\frac{4g}{\gamma}\right)^3\right] = \left(\frac{г\cdot см^3}{см\cdot г}\right)^3 = (см^2)^3 = см^6;$$

$$[\alpha] = \frac{[N]}{\left[\left(g/\gamma\right)^3\right][I]} = \frac{дин}{см^6\cdot см^{-4}} = \frac{дин}{см^2}.$$

Для параметра К применим значение 10·см$^{-6}$. Это соответствует значениям $\gamma = 1{,}52$ г/см^3; $g = 4{,}5\cdot 10^{-2}$ г/см; $D_1 = 2b$; $D_2 = 2(b-a)$ (рис. 1).

Вычисляем I_1:

$$I_1 = \frac{1}{8}\left[\frac{1}{16}\left(\frac{1}{(b-a)^4} - \frac{1}{b^4}\right) - 8K(b^2-(b-a)^2\right] = \frac{1}{8}a(2b-a)\left[\frac{1}{16}\frac{b^2+(b-a)^2}{b^4(b-a)^4} - 8K\right].$$

Параметры модели зафиксируем из условия $I_1 = 0$. Это возможно при a = b2, $\frac{1}{16}\frac{b^2+(b-a)^2}{b^4(b-a)^4} = 8K$, что не соответствует геометрии задачи.

Примем отношение a/b = 0,5. Тогда для a находим:

$$a^6 = \frac{5}{2^{11}K},$$
$$a = 0{,}25 \text{ см},$$
$$b = 0{,}5 \text{ см},$$
$$D_1 = 1 \text{ см};\ D_2 = 0{,}5 \text{ см}.$$

Вычисляем I_2:

$$I_2 = \frac{1}{\mu_у}\int_{-a}^{0}\left[D^{-5}(x) - KD(x)\right]dx,$$

$$\int_{-a}^{0} D^{-5}(x)dx = 2^{-5}\int_{-a}^{0}\frac{dx}{\left(b-\sqrt{b^2-x^2}\right)^5} = \frac{2^{-5}a}{b^5}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\left(1-\lambda\cos t\right)^5},$$

где $\lambda = \frac{a}{b}$.

С учетом введенного ранее значения $\frac{a}{b} = 0{,}5$ получаем:

$$2^{-5}a^{-4}\int_0^{\pi/2}\frac{\cos t dt}{\left(2-\cos t\right)^5}.$$

Применяем универсальную тригонометрическую подстановку $\mathrm{tg}\frac{x}{2} = u$.

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\cos x dx}{\left(2-\cos x\right)^5} = 2\int_0^1\frac{(1-U^2)(1+U^2)^3}{\left(3U^2+1\right)^5}du.$$

Заменой $u\sqrt{3} = t$ получаем более удобный интеграл:

$$\frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3^4}\int_0^{\sqrt{3}}\frac{(3-t^2)(3+t^2)^3}{(t^2+1)^5}dt.$$

Подынтегральную функцию разложим на простейшие дроби:

$$f(t)=\frac{(3-t^2)(3+t^2)^3}{(t^2+1)^5}=\frac{(3-t^2)(3+t^2)^3}{(t+i)^5(t-i)^5}.$$

Здесь i^2 = -1.

$$f(t)=\sum_{k=1}\frac{A_k}{(t-i)^k}+\sum_{k=1}^{5}\frac{B_k}{(t+i)^k}.$$

Так как функция f(t) вещественная, то $f(t)=\overline{f}(t)$, отсюда $A_k=\overline{B}_k$. Здесь символом "–" обозначена операция комплексного сопряжения. Умножая f(t) на $(t-i)^5$, получаем:

$$f(t)(t-i)^5=A_5+A_4(t-i)+A_3(t-i)^2+A_2(t-i)^3+A_1(t-i)^4+(t-i)^5\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{A}_k}{(t+i)^k}.$$

Введем функцию $\psi(t)=f(t)(t-1)^5$;

$$\psi(t)=\frac{(3-t^2)(3+t^2)^3}{(t+i)^5},$$

$$\psi(t)=A_5+A_4(t-i)+A_3(t-i)^2+A_2(t-i)^3+A_1(t-i)^4+(t-i)^5\sum_{k=1}^{5}\frac{\overline{A}_k}{(t+i)^k}.$$

Для коэффициентов A_k получаем:

$$A_5=\psi(i),$$

$$A_4=\lim_{t\to i}\frac{d}{dt}\psi(t),$$

$$A_3=\frac{1}{2}\lim_{t\to i}\frac{d^2}{dt^2}\psi(t),$$

$$A_2=\frac{1}{6}\lim_{t\to i}\frac{d^3}{dt^3}\psi(t),$$

$$A_1=\frac{1}{24}.$$

Вычисляя, получаем:

$$A_5=-i,\ A_4=5,\ A_3=\frac{41}{4}i,$$

$$A_2=-\frac{99}{8},\ A_1=-\frac{95}{8}i.$$

В силу вещественности функции f(t) получаем:

$$f(t)=2\,\mathrm{Re}\sum_{k=1}^{5}\frac{A_k}{(t-i)^k}.$$

Интегрируем:

$$\int f(t)dt=2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{k=2}^{5}\frac{A_k}{(1-k)(t-i)^{k-1}}+A_1\ln(t-i)\right]+C.$$

Вычислив вещественную часть, получим:

$$\int f(t)dt=\frac{2(t-t^3)}{(t^2+1)^4}-\frac{10}{3}\frac{t^3-3t}{(t^2+1)^3}+\frac{41}{2}\frac{t}{(t^2+1)^2}+\frac{99}{4}\frac{t}{t^2+1}-\frac{95}{4}\mathrm{arctg}\frac{1}{t}.$$

Тогда для определенного интеграла:

$$\int_0^{\sqrt{3}}f(t)dt=\frac{477\sqrt{3}}{64}+\frac{95\pi}{12}.$$

Окончательно:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos dx}{(2-\cos x)^5} = \frac{2}{\sqrt{3}\cdot 3^4}\left(\frac{477\sqrt{3}}{64} + \frac{95\pi}{12}\right) = \frac{4293+1520\sqrt{3}\pi}{23328}.$$

Приближенно:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos dx}{(2-\cos x)^5} \cong 0{,}539,$$

$$\int_{-a}^{0} D(x)dx = 2\int_{-a}^{0}\left(b-\sqrt{a^2-x^2}\right)dx = 2\left[bx - \left(\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right]\Bigg|_0^a = 2\left(ab - \frac{\pi a^2}{4}\right).$$

С учетом соотношения a/b = 0,5 получаем:

$$\int_{-a}^{0} D(x)dx = \frac{8-\pi}{2}a^2.$$

Тогда:

$$I_2 \cong \frac{1}{\mu_y}(2^{-5}a^{-4}\cdot 0{,}54 - K\frac{8-\pi}{2}a^2. \qquad (8)$$

При принятых значениях параметров μ_y, a, К будем иметь:

$$I_2 \cong 9{,}34 \ (\text{см}^{-4}). \qquad (9)$$

Тогда сила сжатия ленты:

$$N \cong \frac{\alpha}{\pi^2}\left(\frac{4g}{\gamma}\right)^3\cdot 9{,}34. \qquad (10)$$

Или через параметр К:

$$N \cong \alpha\frac{\pi\xi_0^3}{k}\cdot 9{,}34. \qquad (11)$$

Для К = 10 см^{-6}:

$$N \cong \alpha\cdot 16\cdot 10-4 \ (\text{дин}). \qquad (12)$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Губерман М.С., Чистобородов Г.И., Агалаков В.А.* Математические методы проектирования уплотняющих устройств. – Иваново: ИГТА, 1999.

Рекомендована кафедрой инженерной графики. Поступила 30.11.10.