УДК 621.01

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О СКОРОСТЯХ И ОСОБЫХ ПОЛОЖЕНИЯХ МАНИПУЛЯТОРА ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ СТРУКТУРЫ

# SOLVING THE PROBLEM ON SPEEDS AND SPECIAL CONFIGURATIONS OF THE MANIPULATOR OF PARALLEL STRUCTURE

*М.А. ШИРИНКИН, В.А. ГЛАЗУНОВ, С.В. ПАЛОЧКИН, С.В. ХЕЙЛО*
*M.A. SHIRINKIN, V.A. GLAZUNOV, S.V. PALOCHKIN, S.V. HEJLO*

**(Московский государственный текстильный университет им. А.Н. Косыгина)**
**(Moscow State Textile University "A.N. Kosygin")**
E-mail: palings@mail.ru

***Работа посвящена расчету скоростей и определения особых положений манипулятора параллельной структуры с четырьмя степенями свободы. Описана методика расчетов прямой и обратной задачи о скоростях.***

***The paper is devoted to the calculation of speeds and determination of special configurations of the parallel structure manipulator with four degrees of freedom. The method of calculations of a direct and return speeds problem is described.***

**Ключевые слова: механизмы параллельной структуры, задача о скоростях, задача о положениях.**

**Keywords: parallel structure mechanisms, a speeds problem, a configurations problem.**

Работа является продолжением публикации результатов исследований, посвященных вопросам разработки манипуляционного механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы, предназначенного для использования в автоматизированных системах технологического транспорта современных крупных текстильных предприятий [1], [2].

Рассматриваемый механизм включает три кинематические цепи, один двигатель для вертикального перемещения и три двигателя для перемещения выходного звена в плоскости (рис. 1 –общий вид манипулятора с четырьмя степенями свободы).

Рис. 1

Все двигатели жестко закреплены на раме-основании. Основную нагрузку воспринимает на себя двигатель вертикального перемещения.

При решении задач о положениях и скоростях осуществлена частичная кинематическая развязка, то есть вертикальные линейные перемещения подвижной платформы не зависимы от движений в горизонтальной плоскости.

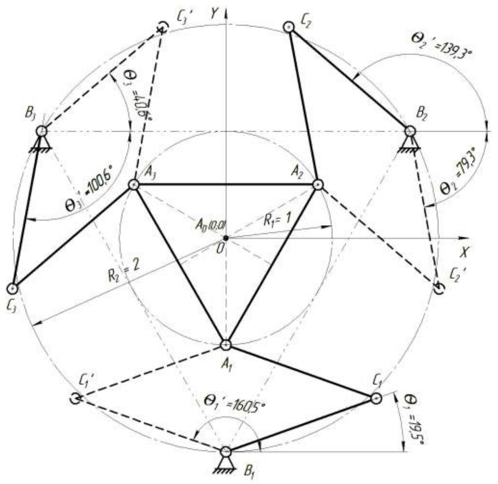


Рис. 2

Сначала решаем обратную задачу о положениях плоского механизма, то есть при известном положении выходного звена механизма (платформы $A_1A_2A_3$) определяем входные обобщенные координаты – углы $\theta_i$ поворота звеньев $B_iC_i$ вокруг точек $B_i$ $(i = 1, 2, 3)$ относительно оси X (рис. 2 – схема механизма в нулевом положении подвижной платформы).

Данная методика позволяет определить положение выходного звена относительно неподвижного основания манипулятора.

Для решения задачи о скоростях необходимо учесть положения входных звеньев, описываемые углами $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$, а также значения координат xn и yn положения центра платформы $A_0$ и угла φ поворота платформы вокруг этого центра. В рассматриваемом случае платформа $A_1A_2A_3$ имеет возможность перемещаться только в горизонтальной плоскости $XOY$. Задаем значения радиусов $R_1 = 1$ и $R_2 = 2$ окружностей, описанных соответственно вокруг треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, а также значения длин звеньев $DL_1 = B_1C_1 = B_2C_2 = B_3C_3 = 1{,}5$ и $DL_2 = = C_1A_1 = C_2A_2 = C_3A_3 = 1{,}5$. Принимаем координаты точек $A_0$, $A_1$, $A_2$ и $A_3$ в системе координат подвижной платформы $X_pY_pZ_p$ (оси $X_p, Y_p$ совпадают с осями $X, Y$ и на рис. 2 не показаны) равными: (0; 0; 0), (0; −1; 0), ($\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0,5; 0) и ($-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 0,5; 0). Координаты точек $B_1$, $B_2$ и $B_3$ в неподвижной системе координат манипулятора XYZ будут равны: (0; −2; 0), ($\sqrt{3}$; 1; 0) и ($-\sqrt{3}$; 1; 0). При этом оси $Z_p$ и Z перпендикулярны плоскости платформы.

Взаимное положение двух систем координат $X_pY_pZ_p$ и XYZ описывается матрицей An, равной произведению двух матриц Anxy и Anφ.

$$An = Anxy \cdot An\phi$$

$$Anxy = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & xn \\ 0 & 1 & 0 & yn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; An\phi = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad An = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 & xn \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 & yn \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для определения координат точек $A_0$, $A_1$, $A_2$, $A_3$, в неподвижной системе координат XYZ умножаем матрицу An на координаты точек в подвижной системе координат: $Ab0 = An \cdot A00$; $Ab1 = An \cdot A01$; $Ab2 = An \cdot A02$; $Ab3 = An \cdot A03$;

$$Ab0 = \begin{pmatrix} xn \\ yn \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Ab1 = \begin{pmatrix} xn + \sin\phi \\ yn + \cos\phi \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$Ab2 = \begin{pmatrix} xn - \dfrac{\sin\phi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\cdot\cos\phi}{2} \\ yn + \dfrac{\cos\phi}{2} + \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sin\phi}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; Ab3 = \begin{pmatrix} xn - \dfrac{\sin\phi}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\cos\phi}{2} \\ yn + \dfrac{\cos\phi}{2} - \dfrac{\sqrt{3}\cdot\sin\phi}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Условие связей будет следующее:

$$(DL)^2 = (xai - xci)^2 + (yai - yci)^2; \quad xci = xbi + DL_1 \cdot \cos\theta_i; \quad yci = ybi + DL_1 \cdot \sin\theta_i.$$

Для упрощения решения квадратного уравнения заменяем выражения

$$Mi = xai^2 + yai^2 + xbi^2 + ybi \;\; + (DL_1)^2 - 2\cdot xai\cdot xbi - 2\cdot yai\cdot ybi - (DL_2)^2,$$
$$Ni = 2\cdot DL_1\cdot(xbi - xai), \qquad Qi = 2\cdot DL_1\cdot(ybi - yai).$$

В результате получаем уравнение:

$$\cos\theta_i = \frac{-2MiNi \pm \sqrt{(2MiNi)^2 - 4(Ni^2 + Qi^2)(Mi^2 - Qi^2)}}{2(Ni^2 + Qi^2)}$$

и находим значения углов $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ при конкретных заданных значениях координат xn и yn положения центра платформы (точки $A_0$), угла поворота φ платформы вокруг этого центра и длин звеньев $B_iC_i$ и $C_iA_i$.

Решение задачи о скоростях входных и выходных параметров рассматриваемого механизма необходимо для определения его функциональных возможностей. Знание скорости перемещения выходного звена при заданной скорости вращения звена BC вокруг точки B и наоборот позволяет осуществлять выбор конструкции механизма, материалов его деталей и типа вращательного привода, удовлетворяющих предъявленным требо-ваниям к скорости перемещения подвиж-ной платформы.

Задачу о скоростях решаем, используя найденные обобщенные координаты $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ и известный аналитический метод [3], основанный на изучении свойств матриц Якоби, представленных в общем виде

$$A\begin{pmatrix}\dot{x}n\\ \dot{y}n\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}=(-B)\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix},$$

где A и B – матрицы частных производных, соответственно от неявной функции по xn, yn, $\phi$ и от неявной функции по обобщенным координатам $\theta_i$; $\begin{pmatrix}\dot{x}n\\ \dot{y}n\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}$ – абсолютные скорости центра выходного звена; $\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix}$ – обобщенные скорости во вращательных шарнирах $B_1$, $B_2$ и $B_3$.

Неявная функция между обобщенными и абсолютными координатами будет иметь вид: $F_i(xn, yn, \phi, \theta_i)=0$.

Уравнение связей можно представить системой уравнений:

$$F_1=(xa1-xb1-DL_1\cos\theta_1)^2+(ya1-yb1-DL_1 1\sin\theta_1)^2=0,$$
$$F_2=(xa2-xb2-DL_1\cos\theta_2)^2+(ya2-yb2-DL_1\sin\theta_2)^2=0,$$
$$F_3=(xa3-xb3-DL_1\cos\theta_3)^2+(ya3-yb3-DL_1\sin\theta_3)^2=0.$$

Взяв частные производные от неявной функции между обобщенными и абсолютными координатами, получим уравнение:

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial xn} & \frac{\partial F_1}{\partial yn} & \frac{\partial F_1}{\partial \phi}\\ \frac{\partial F_2}{\partial xn} & \frac{\partial F_2}{\partial yn} & \frac{\partial F_2}{\partial \phi}\\ \frac{\partial F_3}{\partial xn} & \frac{\partial F_3}{\partial yn} & \frac{\partial F_3}{\partial \phi}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}n\\ \dot{y}n\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial \theta_1} & 0 & 0\\ 0 & \frac{\partial F_2}{\partial \theta_2} & 0\\ 0 & 0 & \frac{\partial F_3}{\partial \theta_3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix},$$

которое можно рассматривать в качестве решения задачи в общем виде.

Приведем пример решения данной задачи при известных параметрах:

$$DL_1=DL_2=1{,}5;\ \ xn=0;\ \ yn=0;\ \ \phi=0.$$

При решении квадратного уравнения для каждой кинематической пары мы находим по два возможных положения звеньев $B_iC_i$ и $C_iA_i$. Для того, чтобы определить истинное положение этих звеньев, надо правильно отложить найденные углы $\theta_1$, $\theta_2$, $\theta_3$ относительно оси X, по часовой стрелке или против нее. Для проверки следует определить координаты точек $C_i$ и $C_i'$. Критерием верного направления угла поворота является условие выполнения соответствующей связи – расстояние между точками $A_i$ и $C_i$.

Подставив исходные данные, получаем значения обобщенных координат $\theta_i$ при расположении центра подвижной платформы в начале координат (рис. 2).

$$\theta_1=0{,}34\ \text{рад}=19{,}5°;\ \ \theta_2=2{,}43\ \text{рад}=139{,}3°;\ \ \theta_3=-1{,}75\ \text{рад}=-100{,}6°.$$

С учетом полученных значений $\theta_i$ имеем матрицы:

$$\mathrm{A}=\begin{pmatrix}-2,828 & 1 & -2,828\\ 0,548 & -2,95 & -2,829\\ 2,282 & 1,949 & -2,829\end{pmatrix} \text{ и } \mathrm{B}=\begin{pmatrix}-2,828 & 0 & 0\\ 0 & -2,829 & 0\\ 0 & 0 & -2,829\end{pmatrix},$$

используя которые, получаем уравнение:

$$\begin{pmatrix}-2,828 & 1 & -2,828\\ 0,548 & -2,95 & -2,829\\ 2,282 & 1,949 & -2,829\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{x}n\\ \dot{y}n\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-2,828 & 0 & 0\\ 0 & -2,829 & 0\\ 0 & 0 & -2,829\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix}.$$

Пусть скорости выходного звена в абсолютной системе координат будут иметь значения: $\dot{x}n = 1 \text{м/с}$; $\dot{y}n = 1\text{ м/с}$; $\dot{\phi} = 1\text{ с}^{-1}$. . Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{pmatrix}-4,656\\ -5,231\\ 1,402\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-2,828 & 0 & 0\\ 0 & -2,829 & 0\\ 0 & 0 & -2,829\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{\theta}_1\\ \dot{\theta}_2\\ \dot{\theta}_3\end{pmatrix}.$$

Решив уравнение, получим значения скоростей $\dot{\theta}_1 = -1,646\text{ с}^{-1}$; $\dot{\theta}_2 = -1,849\text{ с}^{-1}$; $\dot{\theta}_3 = 0,496\text{ с}^{-1}$ . Для решения обратной задачи принимаем $\dot{\theta}_1 = 1\text{ с}^{-1}$, $\dot{\theta}_2 = 1\text{ с}^{-1}$, $\dot{\theta}_3 = 1\text{ с}^{-1}$ . В этом случае имеем:

$$\begin{pmatrix}-2,828 & 1 & -2,828\\ 0,548 & -2,95 & -2,829\\ 2,282 & 1,949 & -2,829\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\dot{x}n\\ \dot{y}n\\ \dot{\phi}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2,828\\ 2,829\\ 2,829\end{pmatrix}.$$

Решив уравнение, получим $\dot{x}n = 0\text{ м/с}$; $\dot{y}n = 0\text{ м/с}$; $\dot{\phi} = -1\text{ с}^{-1}$.

У механизмов параллельной структуры могут проявляться особые положения в рабочей зоне обслуживания, то есть положения, в которых либо теряется степень свободы, или механизм становится неуправляемым. В связи с этим возникает задача по определению указанных положений и поиску возможностей вывода данного механизм из особого положения.

Для определения особых положений снова используем метод, основанный на изучении свойств полученных матриц Якоби, согласно которому манипулятор находится в особом положении, если хотя бы один из определителей матриц А или В равен нулю [3].

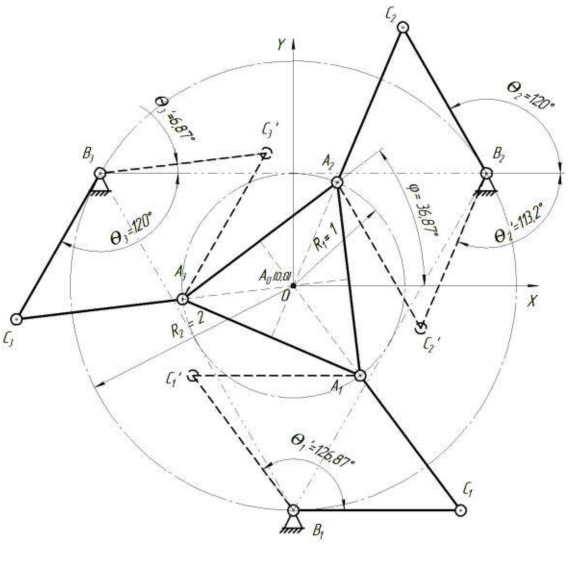


Рис. 3

Рассмотрим случай, когда центр вращения подвижной платформы (точка $A_0$) находится в нулевой точке O неподвижной системы координат (рис. 3 – особое положение механизма, при котором звенья $C_1A_1$, $C_2A_2$, $C_3A_3$ пересекаются в одной точке).

Найдем особое положение при вращении платформы вокруг точки O и определим угол φ, при котором звенья $C_1A_1$, $C_2A_2$, $C_3A_3$ пересекаются в одной точке – начале координат. В этом случае определитель матрицы A будет равен:

$$\left|\begin{pmatrix} -1{,}8 & 2{,}4 & 0 \\ -1{,}179 & -2{,}76 & 0 \\ 2{,}977 & 0{,}36 & 0 \end{pmatrix}\right| = 0,$$

а определитель матрицы B:

$$\left|\begin{pmatrix} -3{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & -3{,}601 & 0 \\ 0 & 0 & -3{,}59 \end{pmatrix}\right| = -46{,}656.$$

Особое положение соответствует повороту выходного звена-платформы на угол $\varphi = 36{,}87°$, а углы $\theta_1 = 0°$, $\theta_2 = 120°$ $\theta_3 = -120°$. Это случай потери управляемости манипулятора.

Рассмотрим случай, при котором определитель матрицы B равен нулю. При смещении центра платформы из начала координат в точку с координатами (0;2;0) и угле поворота $\varphi = 0°$ определитель матрицы B будет равен

$$\left|\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4{,}243 & 0 \\ 0 & 0 & 4{,}332 \end{pmatrix}\right| = 0,$$

а матрицы A:

$$\left|\begin{pmatrix} -1{,}75 & 2{,}439 & 0{,}159 \\ -1{,}503 & -2{,}871 & 0{,}357 \\ -1{,}498 & -2{,}599 & 2{,}343 \end{pmatrix}\right| = 17{,}37,$$

что соответствует углам $\theta_1 = 90°$, $\theta_2 = 65{,}5°$, $\theta_3 = 114{,}3°$. При таком особом положении манипулятора звенья одной цепи выстроены вдоль одной линии (рис. 4). В этом случае механизм теряет степень свободы.

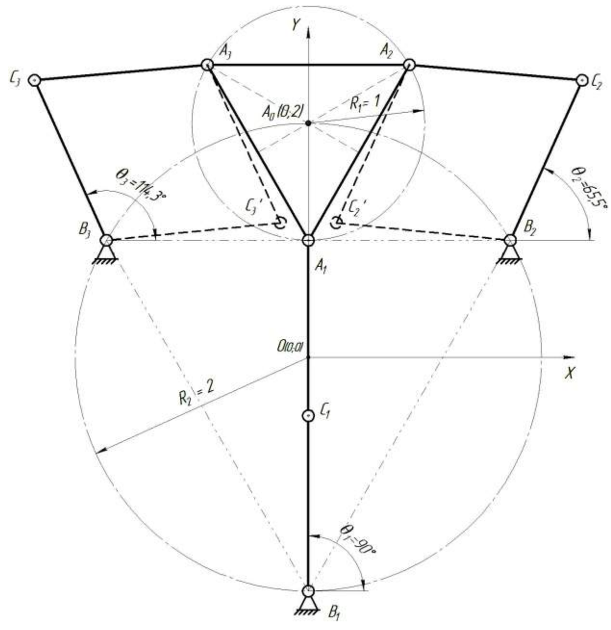


Рис. 4

## ВЫВОДЫ

1. Решена задача о скоростях и особых положениях манипулятора параллельной структуры с четырьмя степенями свободы.
2. Приведены численные примеры расчетов, связанных с потерей управляемости манипулятором или потерей степени свободы.
3. Предложенная методика решения задачи может быть использована в дальнейшем для определения функциональных возможностей манипулятора.

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Ширинкин М.А., Глазунов В.А., Палочкин С.В.* Разработка манипуляционного механизма параллельной структуры с четырьмя степенями свободы // Изв. вузов. Технология текстильной промышленности. – 2010, №1. С.102...107.

2. Патент на полезную модель № 88601 Российская Федерация. / Глазунов В.А., Ширинкин М.А., Палочкин С.В.; Пространственный механизм с четырьмя степенями свободы. – №2009121390/22, 20.11.2009, Бюл. № 32.

3. *Gosselin C.M., Angeles J.* Singularity analysis of closed-loop kinematic chains. // IEEE. Transactions on Robotics and Automatics. – V. 6(3). June 1990. P.281...290.

Рекомендована кафедрой прикладной механики. Поступила 03.03.11.